

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция  
«Все грани математики и механики»  
(15-18 мая 2023 г.)

Сборник статей

Под редакцией

канд. физ.-мат. наук Д.П. Касьмова

Томск

Томский государственный университет

2023

УДК 51

ББК 22

М754

### **М754**

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», 15-18 мая 2023 года: сборник статей. / Под ред. Д.П. Касимова. – Томск. – 2023. – 126 с

В сборнике представлены статьи, посвященные актуальным проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач.

Для студентов, аспирантов, молодых ученых.

УДК 51

ББК 22

Публикуется в авторской редакции.

© НИ Томский государственный университет, 2023

© Авторы статей, 2023

## Оглавление

<b>Д.В. Акулова, М.А. Шерemet</b> «Численный анализ теплообмена в биологической системе при наличии патологической полости в одномерном приближении».....	5
<b>А.В. Амзаракова, М.Д. Михайлов</b> «Численное моделирование процесса самоочищения сточных вод с применением капельного биофильтра».....	15
<b>В.С. Гаврюшенко, А.В. Старченко</b> «Численный метод расчёта течения в каверне с криволинейной нижней границей».....	23
<b>Д.В. Ермохин, Е.Г. Лазарева</b> «Мера подграфика аналога канторовой функции в трехмерном пространстве».....	31
<b>М.С. Ерошкина, Н.С. Бондарева</b> «Численное решение двухфазной задачи таяния влажного грунта в условиях теплообмена с окружающей средой».....	35
<b>Т.Ю. Зверева, С.И. Башмаков</b> «Линейная временная логика знания $ltk.sl$ : семантика и финитная аппроксимируемость»....	46
<b>К.И. Кириллова, Н.С. Бондарева</b> «Численное исследование сопряженной естественной конвекции в замкнутой дифференциально-обогреваемой области».....	53
<b>А.Н. Натаров, Е.И. Гурина, П.А. Сомова</b> «Математическое моделирование влияния теплофизических свойств на эффективность стеклопакетов. ч. I».....	65
<b>Е. П. Недоедко, Н.С. Бондарева</b> «Исследование теплопереноса в квадратной полости при циклическом нагревании нижней стенки».....	77

**Сержантов А.В., Лещинский Д.В.** *«Применение параллельных технологий при численном решении уравнения теплопроводности»*..... 89

**Н.С. Фирсанова, О.В. Матвиенко, И.С. Черкасов** *«Исследование течения закрученного потока полимерно-битумного вяжущего, описываемого моделью кросса, в канале с внезапным расширением»*.....99

**А.С. Чижова, В.И. Лаева** *«Разностные схемы высокого порядка аппроксимации для линейного уравнения переноса»* ..114

**С.Ю. Чувашов, И.А. Антипова** *«Условие невырожденности кратных корней системы полиномов лорана»* .....123

УДК 536.2

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕПЛООБМЕНА В  
БИОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПРИ НАЛИЧИИ  
ПАТОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ОДНОМЕРНОМ  
ПРИБЛИЖЕНИИ**

Д.В. Акулова, М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [nobelsofi@gmail.com](mailto:nobelsofi@gmail.com)

***Аннотация.** Данная работа посвящена численному исследованию нестационарного теплообмена в биологических тканях при наличии патологической полости. За основу математической модели принимается уравнение Пеннесса в одномерном приближении, представляющее собой классическое биотепловое уравнение, учитывающее влияние кровотока и метаболического тепла на баланс энергии в ткани. Исходя из построенной математической модели распределения тепла в биологических тканях при наличии патологической полости, получена зависимость разницы поверхностной температуры между больной и здоровой тканью от характерного линейного размера внутренней полости и глубины ее залегания. Было обнаружено, что в области патологической полости наблюдается снижение температуры, поскольку она не относится к участкам тепловыделения.*

***Ключевые слова.** Биотепловое уравнение Пеннесса, патологическая полость, метод конечных разностей, температурный профиль.*

**Ведение.** Патологические полости могут формироваться внутри биологических системах. Они представляют собой изолированные области с различными теплофизическими характеристиками, которые влияют на

теплообмен внутри системы. Разработка математических моделей, способных описать транспортные процессы внутри таких пораженных биологических систем, является актуальной исследовательской задачей.

Начало математического моделирования и изучение проблем теплопереноса в биологических тканях можно связать с появлением биотеплового уравнения Пеннеса [1]. В результате экспериментов было получено распределение температуры в человеческом предплечье, а затем на основе общих математических подходов была разработана математическая модель.

В данной статье будет рассмотрено моделирование теплообмена в биологической системе при наличии патологической полости в одномерном приближении с использованием метода конечных разностей.

**Описание математической модели.** Рассматривается процесс нестационарного теплообмена в биологических тканях при наличии патологической полости (рисунок 1). За основу математической модели принимается уравнение Пеннеса [1], из которого виден линейный характер зависимости источников тепла биоткани от искомого температурного поля.

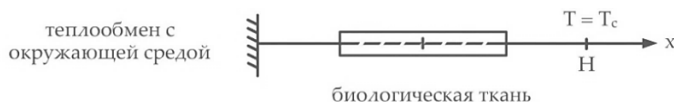


Рис. 1. Область решения задачи

Дифференциальное уравнение теплообмена в биологических тканях [1] имеет следующий вид:

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho_b c_b \omega_b (T_a - T) + Q_m, \#(1)$$

где  $x$  – координата декартовой системы координат,  $t$  – время,  $\rho_t$  – плотность биологической ткани,  $c_t$  – теплоемкость биологической ткани,  $T_a$  – артериальная температура,  $\lambda_t$  –

теплопроводность биологической ткани,  $\rho_b$  – плотность крови,  $c_b$  – теплоемкость крови,  $\omega_b$  – интенсивность перфузии,  $Q_m$  – объемное внутреннее тепловыделение.

Биологическая ткань представляет собой совокупность областей с различными теплофизическими характеристиками (рисунок 2).

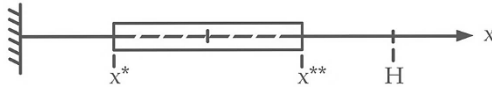


Рис. 2. Геометрия задачи

Математическая постановка задачи при наличии патологической полости имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t c_t \frac{\partial T_N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{t_N} \frac{\partial T_N}{\partial x} \right) + \rho_b c_b \omega_{b_N} (T_a - T_N) + Q_{m_N}, \quad 0 < x < x^*, \\ \rho_t c_t \frac{\partial T_C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{t_C} \frac{\partial T_C}{\partial x} \right) + \rho_b c_b \omega_{b_C} (T_a - T_C) + Q_{m_C}, \quad x^* < x < x^{**}, \quad \#(2) \\ \rho_t c_t \frac{\partial T_N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{t_N} \frac{\partial T_N}{\partial x} \right) + \rho_b c_b \omega_{b_N} (T_a - T_N) + Q_{m_N}, \quad x^{**} < x < H, \end{array} \right.$$

где  $0 < x < x^*$  и  $x^{**} < x < H$  соответствуют здоровой ткани, а  $x^* < x < x^{**}$  – патологической полости.

Начальное температурное распределение может быть получено в результате решения уравнения (1) в стационарной постановке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_t \frac{d^2 T_0(x)}{dx^2} + \rho_b c_b \omega_b (T_a - T_0(x)) + Q_m = 0, \\ T_0(x) = T_c, \quad x = H, \\ -\lambda_t \frac{dT_0(x)}{dx} = \alpha_0 [T_f - T_0(x)], \quad x = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} T_N(x^*) = T_C(x^*), \\ -\lambda_{t_N} \frac{\partial T_N}{\partial x} \Big|_{x=x^*} = -\lambda_{t_C} \frac{\partial T_C}{\partial x} \Big|_{x=x^*}, \end{array} \right. \quad \#(3) \\ \left\{ \begin{array}{l} T_C(x^{**}) = T_N(x^{**}), \\ -\lambda_{t_C} \frac{\partial T_C}{\partial x} \Big|_{x=x^{**}} = -\lambda_{t_N} \frac{\partial T_N}{\partial x} \Big|_{x=x^{**}}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

где  $T_0(x)$  – температура в начальный момент времени. Здесь поверхность кожи определена на границе  $x = 0$ , а центр тела – на границе  $x = H$ .

Граничные условия: поверхность кожи  $x = 0$  охлаждалась за счет теплообмена с окружающей средой

$$-\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_f [T_s - T], \quad x = 0, \quad \#(4)$$

где  $T_s$  – температура охлаждающей среды.

Температура тела на границе  $x = H$  поддерживалась постоянной  $T_c$

$$T = T_c, \quad x = H \quad \#(5)$$

При решении поставленной нестационарной краевой задачи, включающей систему дифференциальных уравнений (2), начальное условие, полученное в результате решения стационарной задачи (3), а также граничное условие третьего рода на поверхности ткани (4) и граничное условие первого рода на внутренней границе биологической ткани (5), используется метод конечных разностей [2]. Область, в которой определяется решение дифференциальных уравнений, покрывается расчетной равномерной сеткой – дискретным множеством точек. При переходе от дифференциальной задачи к разностной задаче все дифференциальные операторы, входящие в систему уравнений (2), а также в начальные и граничные условия, заменяются их разностными аналогами. Полученные системы линейных алгебраических уравнений были решены численно с использованием метода прогонки с дальнейшей визуализацией результатов.

**Полученные результаты.** В расчетах применяются типичные свойства здоровой ткани и патологической полости в соответствии с [3] (таблица 1):



	Ткань	Теплопроводность, (Вт/м°C)	Перфузия крови, (мл/с/мл)	Скорость метаболичес кого тепловыделе ния, (Вт/м³)
1	Здоровая ткань	0.42	0.00018	450
2	Патологическая полость	0.56	0	0

*Таблица 1. Параметры моделирования*

Плотность крови  $\rho_b$  и ткани  $\rho_t$  принимаются равными 920 (кг/м<sup>3</sup>), удельная теплоёмкость –  $c_t = c_b = 3000$  (Дж/кг°C), а артериальная температура  $T_a$  равна 37 (°C) [3].

Рисунок 3 иллюстрирует профили температуры в зависимости от выбранного коэффициента теплообмена  $\alpha_f$ , характеризующего интенсивность теплообмена на внешней границе  $x = 0$ .

Очевидно, что с ростом коэффициента теплообмена наблюдается более интенсивное охлаждение области решения, это связано с тем, что температура внешней среды значительно ниже начальной температуры области решения. С течением времени эффект охлаждения со стороны внешней границы ( $x = 0$ ) проникает вглубь биологической системы. При этом можно заметить, что для изменения температуры внутри патологической полости необходимо больше времени.

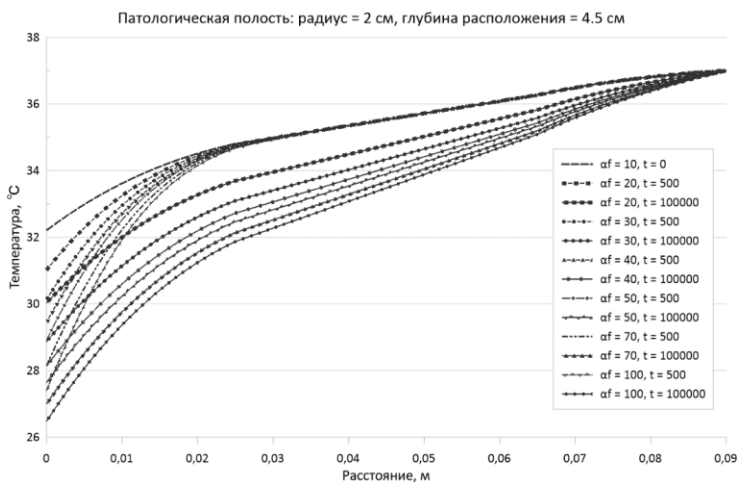
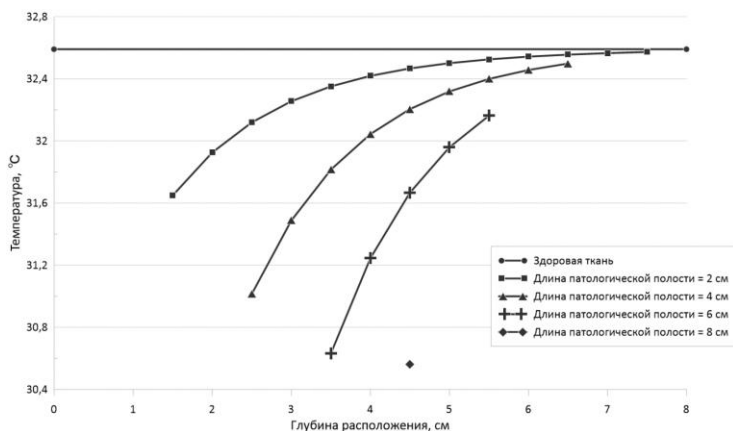


Рис. 3. Распределения температуры в зависимости от коэффициента теплообмена  $\alpha_f$  в различные моменты времени.

Рисунок 4 иллюстрирует зависимость температуры на поверхности соединительной ткани от размера и глубина расположения патологической полости. Принимая во внимание полученные распределения, можно сделать вывод о том, что температура поверхности снижается с увеличением размера патологической полости, а также с уменьшением глубины ее расположения. Также можно заметить, что по мере увеличения глубины залегания патологической полости и уменьшения ее размера наблюдается рост температуры на поверхности соединительной ткани, приближающийся к уровню температуры здоровой ткани.



*Рис. 4. Температура на поверхности тела при различных значениях размера и глубины залегания патологической полости.*

На рисунках 5 – 7 показаны профили температуры внутри биологической системы при различных значениях размера и глубины залегания патологической полости в разные моменты времени. Представленные распределения демонстрируют зависимость разницы температуры в теле между больной и здоровой тканью от характерного линейного размера патологической полости и глубины ее залегания. В области патологической полости наблюдается снижение температуры, поскольку она не относится к участкам тепловыделения. Также, чем ближе к поверхности тела находится патологическая полость, наблюдается значительное снижение температуры на поверхности системы (при  $x = 0$ ).

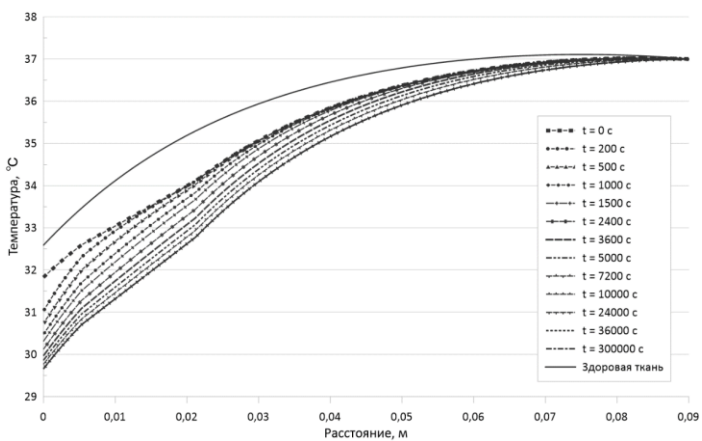


Рис. 5. Профили температуры внутри биологической системы при следующих значениях геометрических характеристик патологической полости: размер полости = 1 см, глубина расположения = 1.5 см.

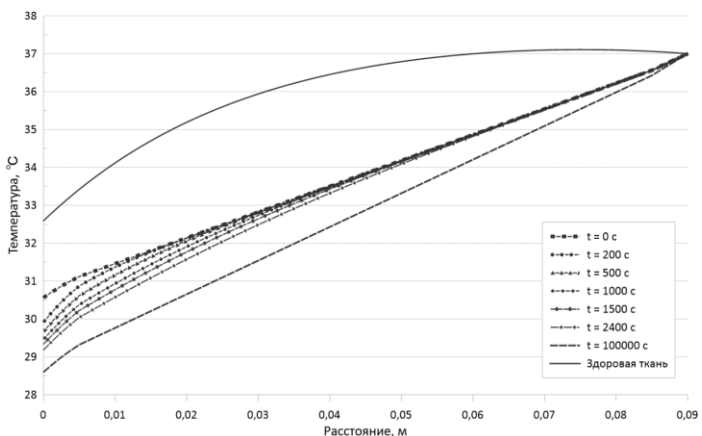
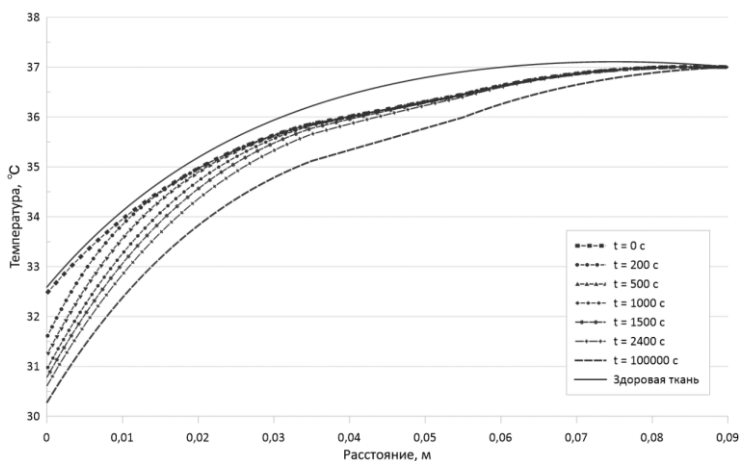


Рис. 6. Профили температуры внутри биологической системы при следующих значениях геометрических характеристик патологической полости: размер полости = 4 см, глубина расположения = 4.5 см.



*Рис. 7. Профили температуры внутри биологической системы при следующих значениях геометрических характеристик патологической полости: размер полости = 1 см, глубина расположения = 4.5 см.*

**Заключение.** В результате проведено математическое моделирование нестационарного температурного распределения внутри одномерной биологической системы, содержащей патологическую полость. Установлена зависимость температуры поверхности такой системы от размера и глубины залегания патологической полости. Полученные результаты отражают возможность детектирования наличия патологической полости путем измерения температуры на поверхности биологической системы.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm // J. Appl. Physiol. – 1948. – Vol. 1, Issue 2. – P. 93–122.

2. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
3. Patil H.M., Maniyeri R. Finite difference method based analysis of bio-heat transfer in human breast cyst, Thermal Science and Engineering Progress 10 (2019) 42–47.
4. Deng Z.S., Liu J. Analytical study on bio heat transfer problems with spatial or transient heating on skin surface or inside biological bodies // J. Biomech. Eng. – 2002. – Vol. 124, Issue 6. – P. 638–649.

## NUMERICAL ANALYSIS OF HEAT TRANSFER IN A BIOLOGICAL SYSTEM WITH THE PRESENCE OF PATHOLOGICAL CAVITY IN ONE-DIMENSIONAL APPROXIMATION

D.V. Akulova, M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [nobelsofi@gmail.com](mailto:nobelsofi@gmail.com)

**Abstract.** *This paper presents a numerical analysis of transient heat transfer in biological tissues in the presence of a pathological cavity. The one-dimensional Pennes equation is used as the mathematical model, which represents the classic bioheat equation taking into account the influence of blood flow and metabolic heat on the energy balance in the tissue. Based on the developed mathematical model of heat distribution in biological tissues in the presence of a pathological cavity, a dependence of the difference in surface temperature between diseased and healthy tissue on the reference linear size of the internal cavity and its depth was obtained. It was found that a decrease in temperature is observed in the area of the pathological cavity since it does not belong to the areas of heat generation.*

**Keywords.** *Pennes bio-heat transfer equation, Pathological cavity, Finite difference method, Temperature profile.*

УДК 519.6

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА  
САМООЧИЩЕНИЯ СТОЧНЫХ ВОД С ПРИМЕНЕНИЕМ  
КАПЕЛЬНОГО БИОФИЛЬТРА**

А.В. Амзаракова, М.Д. Михайлов

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: nastya.amzarakova.00@mail.ru

***Аннотация.** Рассматривается одномерная модификация моделей Стритера-Фелпса, Доббинса-Дриснека и Кемпа, для реализации которой используется неявный численный метод. По результатам проведенных расчетов анализируется влияние потока органических веществ из донных отложений, скорости убыли и поступления кислорода за счет различных факторов и биофильтра на поведение концентрации органических соединений и дефицита кислорода.*

***Ключевые слова:** биофильтр, модель, численная реализация, неявная схема, дефицит кислорода, органическое вещество.*

**Введение.** Из-за увеличения объема загрязнений, которые сбрасываются в реки, озера и другие водные ресурсы, многие водоемы утратили способность к самоочищению. Поэтому в настоящее время весьма актуальна проблема очистки сточных вод.

В работе рассматривается одномерная модификация математических моделей Стритера-Фелпса, Доббинса-Дриснека и Кемпа, представляющая собой краевую задачу, описываемую системой двух дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} + U \frac{\partial L}{\partial x} = -(k_1 + k + k_3)L + J_B + D_f \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial D}{\partial t} + U \frac{\partial D}{\partial x} = k_1 L - k_2 D + J_1 + J_2 - J_3 + D_f \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}, \\ L(x, 0) = L^0(x), D(x, 0) = D^0(x), 0 \leq x \leq A, \\ \frac{\partial L(0, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial D(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial L(A, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial D(A, t)}{\partial x} = 0, 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $L(t)$  – концентрация органического вещества,  $D(t)$  – дефицит кислорода,  $U$  – компонента вектора скорости течения реки,  $k_1$  – константа окислительной трансформации органического вещества,  $k_2$  – коэффициент реэрации,  $k_3$  – константа скорости удаления органического вещества путем осаждения на дно,  $k$  – константа скорости изъятия органических загрязнений,  $J_1$  – скорость убыли кислорода за счет разложения придонных иловых отложений,  $J_2$  – скорость убыли растворенного кислорода вследствие дыхания растений,  $J_3$  – скорость поступления кислорода из-за фотосинтеза,  $J_B$  – поток органических веществ, вымываемых из донных отложений,  $D_f$  – коэффициент диффузии.

В качестве очистного сооружения используется капельный биофильтр [1]. В нем сточная вода подается в виде капель или струй. Естественная вентиляция воздуха осуществляется через открытую поверхность биофильтра и дренаж. Такой тип биофильтров рекомендуется применять для полной биологической очистки сточных вод.

**Нахождение численного и точного решений.** Для нахождения численного решения поставленной задачи аппроксимируем систему (1) неявной разностной схемой:



$$\begin{cases}
\frac{L_j^{n+1} - L_j^n}{\tau} + U \frac{L_j^{n+1} - L_{j-1}^{n+1}}{h} = -(k_1 + k + k_3)L_j^{n+1} + J_B + D_f \frac{L_{j+1}^{n+1} - 2L_j^{n+1} + L_{j-1}^{n+1}}{h^2}, \\
\frac{D_j^{n+1} - D_j^n}{\tau} + U \frac{D_j^{n+1} - D_{j-1}^{n+1}}{h} = k_1 L_j^{n+1} - k_2 D_j^{n+1} + J_1 + J_2 - J_3 + D_f \frac{D_{j+1}^{n+1} - 2D_j^{n+1} + D_{j-1}^{n+1}}{h^2}, \\
j = \overline{1, N-1}, n = \overline{0, M-1}, \\
L_j^0 = L^0(x_j), D_j^0 = D^0(x_j), j = \overline{0, N}, \\
L_0^{n+1} = L_1^{n+1}, D_0^{n+1} = D_1^{n+1}, \\
L_N^{n+1} = L_{N-1}^{n+1}, D_N^{n+1} = D_{N-1}^{n+1}, n = \overline{0, M-1}.
\end{cases} \quad (2)$$

Показано, что разностная схема (2) аппроксимирует систему (1) с 1-м порядком аппроксимации относительно  $\tau$  и  $h$  и абсолютно устойчива по начальным данным. Следовательно, по теореме Лакса решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной.

Расчеты проводились с использованием и без использования биофильтра.

Точечная модель, соответствующая одномерной пространственной модели (1), имеет следующий вид:

$$\begin{cases}
\frac{dL}{dt} = -(k_1 + k_3 + k)L + J_B, \\
\frac{dD}{dt} = k_1 L - k_2 D + J_1 + J_2 - J_3, \\
L(0) = L^0, D(0) = D^0.
\end{cases} \quad (3)$$

Определено точное решение системы (3):

$$\begin{cases}
L(t) = \frac{J_B}{k_1 + k_3 + k} + \left( L^0 - \frac{J_B}{k_1 + k_3 + k} \right) e^{-(k_1 + k_3 + k)t}, \\
D(t) = \frac{k_1 J_B}{(k_1 + k_3 + k)k_2} + \frac{J_1 + J_2 - J_3}{k_2} + \frac{1}{k_1 + k_3 + k - k_2} \left( -k_1 L^0 + \frac{k_1 J_B}{k_1 + k_3 + k} \right) e^{-(k_1 + k_3 + k)t} + \\
+ \left( D^0 - \frac{k_1 J_B}{(k_1 + k_3 + k)k_2} - \frac{J_1 + J_2 - J_3}{k_2} - \frac{1}{k_1 + k_3 + k - k_2} \left( -k_1 L^0 + \frac{k_1 J_B}{k_1 + k_3 + k} \right) \right) e^{-k_2 t}.
\end{cases} \quad (4)$$

Проводится сравнение точного [2] и численного решений. Результаты представлены в виде графиков.

Максимальная относительная погрешность концентрации органического вещества  $L(t)$  и дефицита кислорода  $D(t)$  с использованием и без использования биофильтра составляет около 0,025%.

**Анализ влияния параметров.** Анализируется влияние биофильтра, скорости убыли и поступления кислорода за счет различных факторов и потока органических веществ из донных отложений на поведение концентрации органических соединений и дефицита кислорода.

Рассматривается случай  $J_i = 0, i = \overline{1,3}; J_B = 0$ , представленный на рис. 1, когда не учитывается влияние вышеуказанных параметров.

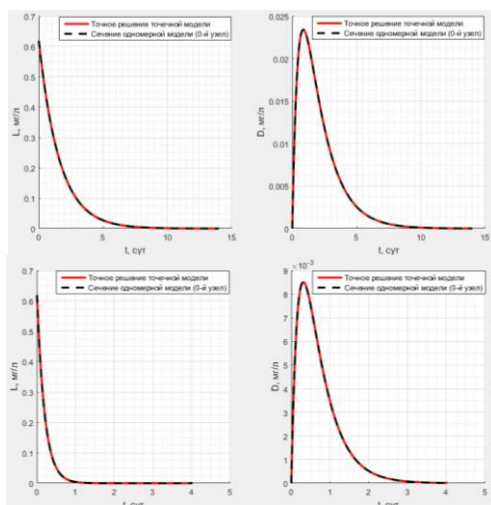


Рис.1. Графики сравнения точного решения и сечения в 0-м узле одномерной модели без использования и с использованием биофильтра, случай  $J_i = 0, i = \overline{1,3}; J_B = 0$ .

При  $k=0$  (когда не используется биофильтр) концентрация органического вещества падает от начального значения 0,619 мг/л до 0 за 14 суток. При  $k=4,4$  спад происходит за 1,74 сут, т.е. процесс очищения ускоряется примерно в 8 раз.

Дефицит кислорода при отсутствии биофильтра падает до 0 за 14 сут, а в случае использования биофильтра – за 4,03 сут.

Следующий случай  $J_i \neq 0, i = \overline{1,3}; J_B = 0$  (рис. 2) учитывает влияние скоростей убыли и поступления кислорода за счет различных факторов.

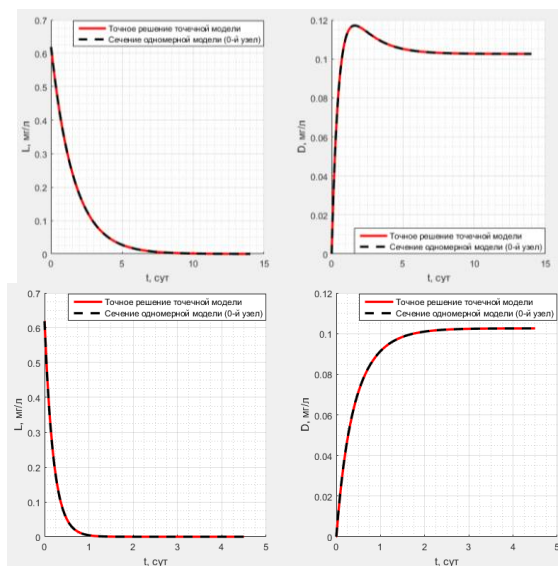


Рис.2. Графики сравнения точного решения и сечения в 0-м узле одномерной модели без использования и с использованием биофильтра, случай  $J_i \neq 0, i = \overline{1,3}; J_B = 0$ .

Из рис. 2 видно, что очищение загрязнения происходит за то же время, что и в предыдущем случае, т.е. за 14 сут без использования биофильтра и за 1,74 сут при использовании.

При  $k=0$  дефицит кислорода за 14 сут устанавливается на величине 0,102 мг/л. При использовании капельного

биофильтра к 4,5 сут дефицит кислорода растет от 0 и устанавливается до значения 0,1026 мг/л.

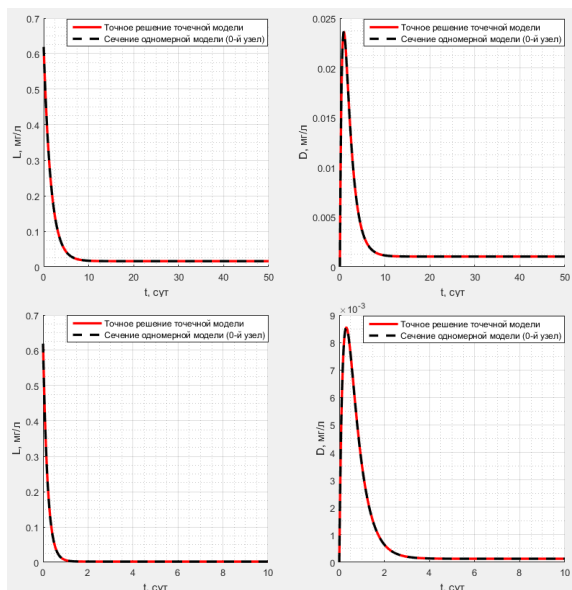


Рис.3. Графики сравнения точного решения и сечения в 0-м узле одномерной модели без использования и с использованием биофильтра, случай  $J_i = 0, i = \overline{1,3}; J_B \neq 0$ .

При учете влияния потока органических веществ ( $J_i = 0, i = \overline{1,3}; J_B \neq 0$ ) концентрация загрязнения падает до значения 0,016 мг/л к 21,8 сут при  $k=0$  и до величины 0,002 мг/л к 2,5 сут при  $k=4,4$ .

Дефицит кислорода за 18 сут устанавливается на значении 0,001 мг/л при  $k=0$  и 0,0001 мг/л за 5 сут при  $k=4,4$ .

В случае, когда учитывается влияние всех параметров ( $J_i \neq 0, i = \overline{1,3}; J_B \neq 0$ ), концентрация органического вещества совпадает со значениями, приведенными в предыдущем случае,

т.е. устанавливается на величине 0,016 мг/л к 21,8 сут при  $k=0$  и на 0,002 мг/л к 2,5 сут при  $k=4,4$ .

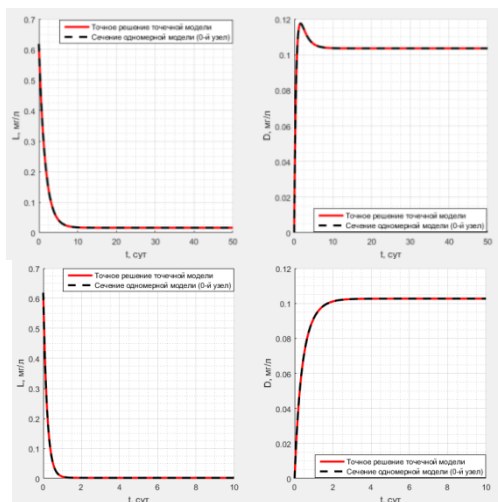


Рис.4. Графики сравнения точного решения и сечения в 0-м узле одномерной модели без использования и с использованием биофильтра, случай  $J_i \neq 0, i = \overline{1,3}; J_B \neq 0$ .

При  $k=0$  дефицит кислорода за 17 сут устанавливается на величине 0,1 мг/л, а при  $k=4,4$  – 0,1 мг/л за 5 сут.

**Заключение.** При учете влияния потока органических веществ, вымываемых из донных отложений,  $J_i = 0, i = \overline{1,3}; J_B \neq 0$ , процесс очищения происходит не полностью, что качественно совпадает с графиками, приведенными в [3]. Такие результаты более близки к реальным условиям. Применение биофильтра ускоряет процесс очищения примерно в 8 раз.

При учете всех параметров,  $J_i \neq 0, i = \overline{1,3}; J_B \neq 0$ , дефицит кислорода не падает до 0, а устанавливается на значении  $\approx 0,102$  мг/л. При использовании биофильтра падение дефицита кислорода до этой же величины происходит в 3 раза быстрее.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яковлев С. В., Воронов Ю. В. Биологические фильтры. - М.: Стройиздат, 1982. – 121 с.
2. Амзаракова А. В., Михайлов М. Д. Численное моделирование процесса самоочищения сточных вод с применением различных типов биофильтров // Все грани математики и механики: сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции (Томск, 23-27 мая 2022 г.) / под ред. Л. В. Гензе. – Томск: ООО «Издательство «Красное знамя», 2022. – с. 6-11.
3. Алехин В. Е. Анализ и совершенствование математических моделей для прогноза экологической надежности источников коммунального водоснабжения. Дис. канд. техн. наук: 05.17.08, 05.02.13. – Москва, 2006. – 217 с.

### NUMERICAL MODELING OF THE PROCESS OF WASTEWATER SELF-PURIFICATION WITH THE APPLICATION OF A DRIP BIOFILTER

A.V. Amzarakova, M.D. Mikhailov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: nastya.amzarakova.00@mail.ru

**Abstract.** *In the present study, we consider a one-dimensional modification of the Streeter-Phelps, Dobbins-Drisnack and Camp models, which is solved using an implicit numerical method. Based on the results of the calculations, the influence of the flow of organic substances from bottom sediments, the rate of loss and supply of oxygen due to various factors and the biofilter on the behavior of the concentration of organic compounds and oxygen deficiency is analyzed.*

**Keywords:** *biofilter, model, numerical realization, implicit scheme, oxygen deficiency, organic substance.*

УДК 519.6

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ТЕЧЕНИЯ В КАВЕРНЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

В.С. Гаврюшенко, А.В. Старченко

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [gavryushenko\\_vs@mail.ru](mailto:gavryushenko_vs@mail.ru)

***Аннотация.** В настоящей работе применено преобразование координат для перехода от задачи с криволинейной нижней границей к задаче с прямолинейной, выполнена дискретизация области исследования, получено при помощи модифицированного алгоритма SIMPLE с использованием итерационного метода Н.И. Булеева распределение скорости в виде векторных полей.*

***Ключевые слова.** Метод SIMPLE, метод неполной факторизации, противопотоковая схема второго порядка, число Рейнольдса, аппроксимация, сходимость, конвекция, диффузия.*

**Введение.** Задача о течении жидкости в каверне с подвижной верхней крышкой является критерием оценки качества метода вычислительной математики [1], применяемого для решения системы уравнений Навье-Стокса [2,3,4]. Из-за возникающих вихревых движений, течение жидкости в каверне имеет сложную геометрическую структуру. В рассматриваемой задаче используются уравнения Навье-Стокса. Основой данной работы является метод конечных объёмов [5]. Стационарные поля скорости и давления определяются при помощи алгоритма SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) [2].

Алгоритм SIMPLE является одним из распространённых методов численного решения уравнений Навье-Стокса. Название метода является аббревиатурой SIMPLE — Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations [2]. Этот алгоритм был разработан британским учёным

Брайаном Сполдингом в начале 1970-х годов и после этого использовался во множестве работ для решения задач теплопереноса и гидродинамики, также он послужил фундаментом для развития целого класса численных методов.

Целью данной работы является построение на базе алгоритма SIMPLE метода расчёта двумерного рециркуляционного течения в каверне с криволинейной нижней границей.

### Постановка задачи.

Решается система уравнений Навье-Стокса [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), (x, y) \in D \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), (x, y) \in D \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, (x, y) \in D \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), (x, y) \in D \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, (x, y) \in D \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), (x, y) \in D \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, (x, y) \in D \end{array} \right. \quad (3)$$

со следующими граничными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, y) = 0, v(0, y) = 0; \\ u(L, y) = 0, v(L, y) = 0; \\ u(x, H) = U, v(x, H) = 0, U = const > 0; \\ u(x, h(x)) = 0, v(x, h(x)) = 0. \end{array} \right.$$

Здесь  $u, v, p, \rho$  – компоненты вектора скорости, давление и плотность;  $\nu$  – кинематическая вязкость;

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq L, h(x) \leq y \leq H \right\}.$$

Преобразованные уравнения Навье-Стокса.

Было выполнено следующее преобразование координат

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x; \\ \eta = H \frac{y - h(x)}{H - h(x)} \end{array} \right.$$



В результате которого система (1)-(3) приняла вид [6]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial[(H-h)u^2]}{\partial\xi} + \frac{\partial[(H-h)wu]}{\partial\eta} &= -\frac{1}{\rho}(H-h)\frac{\partial p}{\partial\xi} - \frac{h}{\rho}(\eta-H)\frac{\partial p}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[v(H-h)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\eta}\left[v\left(\frac{H^2}{H-h} + (h')^2\frac{(\eta-H)^2}{H-h}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta}\right] + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[vh'(\eta-H)\frac{\partial u}{\partial\eta}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[vh'(\eta-H)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial[(H-h)uv]}{\partial\xi} + \frac{\partial[(H-h)wv]}{\partial\eta} &= -\frac{H}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[v(H-h)\frac{\partial v}{\partial\xi}\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\eta}\left[v\frac{H^2 + (h')^2(\eta-H)^2}{H-h}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right] + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[vh'(\eta-H)\frac{\partial v}{\partial\eta}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[vh'(\eta-H)\frac{\partial v}{\partial\xi}\right] \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial[(H-h)u]}{\partial\xi} + \frac{\partial[(H-h)w]}{\partial\eta} &= 0, \\ \text{при } w &= \frac{Hv + (\eta-H)h'u}{H-h} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\left\{ \begin{aligned} W_n(0, \eta) &= 0, W_\tau(0, \eta) = 0; \\ W_n(L, \eta) &= 0, W_\tau(L, \eta) = 0; \\ W_\tau(\xi, H) &= U, W_n(\xi, H) = 0, U = const > 0; \\ W_n(\xi, 0) &= 0, W_\tau(\xi, 0) = 0. \end{aligned} \right.$$

Здесь  $\overset{III}{W} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$

Численный метод.

Дискретизация уравнений велась при помощи метода конечных объёмов. Уравнения преобразовывались при помощи противопотоковой схемы второго порядка.

Модифицированный алгоритм SIMPLE:

1. Задаётся начальное значение давления  $p^*$ ;
2. Из уравнений движения находится  $u^*, v^*$ ;

$$a_e^u u_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^* + d_e^u (p_p^* - p_E^*) + d_{ee}^u (p_{en}^* - p_{es}^*) + b_e^u$$

$$a_n^v v_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb}^* + d_n^v (p_p^* - p_E^*) + b_n^v$$

3. Решается уравнение для  $p^*$  [7];

$$c_p p'_p = (c_E p'_E + c_W p'_W + c_N p'_N + c_S p'_S) + b_p$$

4. Вычисляется  $p = p^* + p'$ ;
  5. Переопределяется  $u, v$ ;
  6. Представляем  $p$  как новое  $p^*$  и переходим к шагу 2.
- Процесс выполняется пока не будет получено сходящееся решение.

Результаты.

Были построены поля скоростей с различными нижними границами и разных размеров, на которых видны завихрения.

Условия проведения расчётов: высота каверны  $H=1\text{м}$ , ширина  $L=1\text{м}$ , скорость движения верхней крышки  $1\text{м/с}$ , число Рейнольдса  $1000$ . Построена структурированная неравномерная сетка размером  $22 \times 22$  (Рис.1).

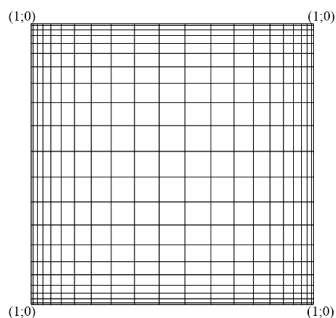


Рис. 1. Дискретная область для каверны с нижней границей, в координатах  $(\xi, \eta)$

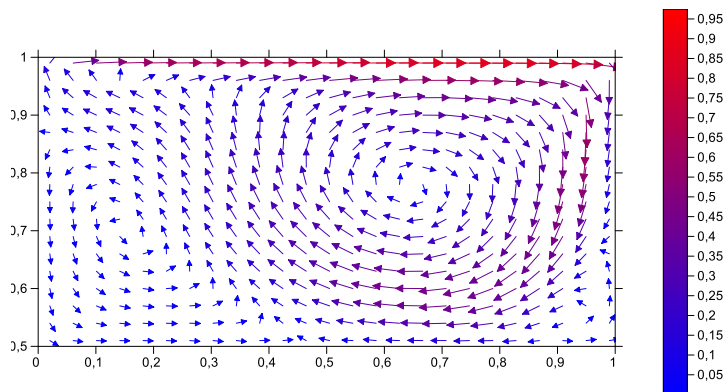


Рис. 2. Поле скоростей в каверне с нижней границей  $h(x) = 0.5$

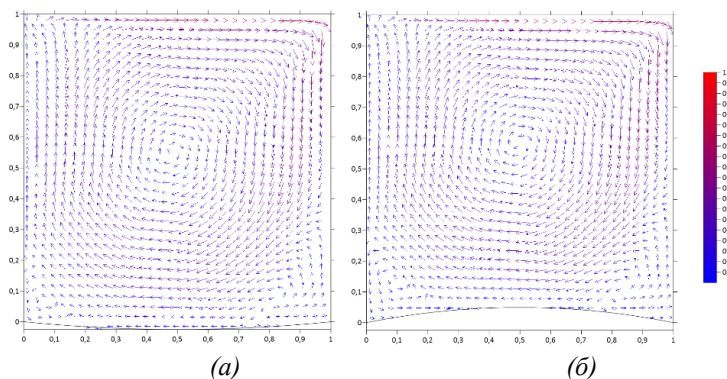
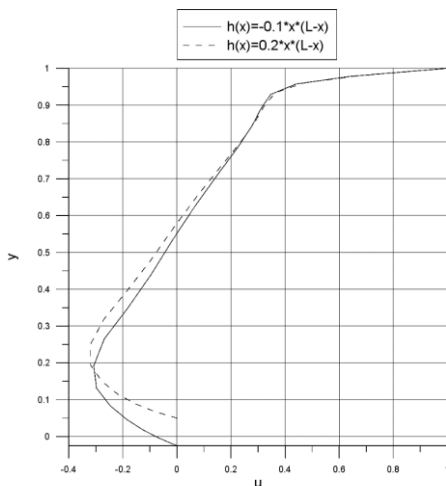


Рис. 3. Поля скоростей в каверне с нижней границей  
 (а)  $h(x) = -0.1 \cdot x \cdot (L - x)$  (б)  $h(x) = 0.2 \cdot x \cdot (L - x)$

На рисунке 2 представлено векторное поле скорости в каверне, нижняя граница которой описывается следующим уравнением:  $h(x) = 0.5$  из рисунка видно, что образуются значительные завихрения слева и справа по середине каверны и небольшое завихрение в правой нижней части каверны.

Из рисунка 3 видно, что при увеличении объёма каверны, размеры нижних угловых вихрей уменьшаются.



*Рис.4. Зависимость скорости  $u$  от высоты  $y$  в сечении при  $\xi = 0.5$  в кавернах с криволинейными нижними границами*

Рисунок 4 показывает, что при выпуклой вверх границе, минимальное значение скорости  $u$  уменьшается и центр основного вихря немного приподнимается вверх.

**Заключение.** В данной работе впервые была рассмотрена двумерная стационарная задача о ламинарном течении в каверне с криволинейной нижней границей, описываемая системой уравнений Навье-Стокса, состоящей из двух уравнений движения и уравнения неразрывности.

Было выполнено преобразование координат для перехода от задачи в каверне с криволинейной нижней границей к задаче с прямолинейной. После преобразования координат уравнения дискретизировались при помощи метода конечных объемов и преобразовывались при помощи противопотоковой схемы второго порядка. Далее задача решалась методом

SIMPLE с использованием метода Булеева для поправки давления.

В качестве результатов работы были построены поля скоростей, отражающие поведение вихревых течений жидкости, для каверн с различными криволинейными нижними границами.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики : учебное пособие / Г. И. Марчук. - Изд. 4-е, стер.. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2009. - 608 с.;
2. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар; Пер. с англ. под ред. В. Д. Виленского. - М. : Энергоатомиздат, 1984. - 149 с.;
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. - Москва : Физматлит, 1961. - 203 с.;
4. Кочубей А.А., Кравец Е.В. Исследование циркуляционного течения в квадратной и прямоугольной кавернах при малых числах Рейнольдса / А.А. Кочубей, Е.В. Кравец // Вісник Дніпропетровського університету – 2016.– Т.24. – №5;
5. Ильин В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / В. П. Ильин. - Новосибирск : Издательство Института математики, 2000. - 344 с.;

### NUMERICAL METHOD FOR CALCULATING THE FLOW IN A CAVITY WITH A CURVED LOWER BOUNDARY

V.S. Gavryushenko, A.V. Starchenko

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [gavryushenko\\_vs@mail.ru](mailto:gavryushenko_vs@mail.ru)

*Abstract.* In this paper, a coordinate transformation is applied to transition from a problem with a curved lower bound to a problem

*with a rectilinear one, a discretization of the study area is performed, a velocity distribution in the form of vector fields is obtained using the modified SIMPLE algorithm using the N.I. Buleyev iterative method.*

**Keywords.** *SIMPLE method, incomplete factorization method, second-order counterflow scheme, Reynolds number, approximation, convergence, convection, diffusion.*

УДК 517.518.112

## МЕРА ПОДГРАФИКА АНАЛОГА КАНТОРОВОЙ ФУНКЦИИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д.В. Ермохин, Е.Г. Лазарева

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

Email: [ermohindv@mail.ru](mailto:ermohindv@mail.ru)

***Аннотация.** В данной работе рассматривается продолжение классической функции Кантора до вещественнозначной функции от двух переменных, с целью нахождения меры ее подграфика, используя теорию интеграла Лебега.*

***Ключевые слова.** Функция Кантора, интеграл Лебега, мера Лебега.*

**Введение.** Зачастую интегрирование элементарных функций процесс довольно скучный и технический. Куда более интересным он становится тогда, когда под знаком интеграла появляется нестандартная функция, например – функция Кантора. Но даже от такой необычной функции интеграл уже известен, более того, были подсчитаны интегралы от натуральных степеней этой функции и исследовано их асимптотическое поведение. Однако, ни в одной из прочитанных работ я не нашел идеи о продолжении данной функции на большие размерности, поэтому в данной статье описывается возможность такого продолжения, а также вычисление интеграла от него.

### **Основная часть.**

#### **I. Интеграл от классической функции Кантора.**

Возьмем классическую функцию кантора  $C: [0,1] \rightarrow [0,1]$  – непрерывная, не строго монотонная, почти всюду дифференцируемая функция.

Данная функция обладает некоторой симметрией, которая значительно упрощает ее интегрирование.

**Утверждение.**  $\forall t \in [0,1] \setminus S$ , где  $S$  – множество Кантора:  
 $C(t) + C(1-t) = 1$  и  $C(t) = 2C(t/3)$

Пользуясь этим утверждением, найдем интеграл от классической Канторовой функции.

$$\int_0^1 C(t) dt = \int_0^{\frac{1}{3}} C(t) dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} C(t) dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 C(t) dt$$

Рассмотрим  $\int_0^{\frac{1}{3}} C(t) dt$ .

$$\int_0^{\frac{1}{3}} C(t) dt = \left| t = \frac{s}{3} \right| = \int_0^1 \frac{1}{3} C\left(\frac{s}{3}\right) ds = \frac{1}{6} \cdot \int_0^1 C(s) ds$$

Далее рассмотрим  $\int_{\frac{1}{3}}^1 C(t) dt$ .

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 C(t) dt = \left| t = 1 - s \right| = \int_0^{\frac{1}{3}} C(1-s) ds = \int_0^{\frac{1}{3}} ds - \int_0^{\frac{1}{3}} C(s) ds$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} ds - \int_0^{\frac{1}{3}} C(s) ds = -\frac{1}{6} \int_0^1 C(s) ds$$

Тогда:

$$\int_0^1 C(t) dt = \frac{1}{6} \cdot \int_0^1 C(s) ds + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} dt + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \int_0^1 C(s) ds = \frac{1}{2} \quad (1)$$

**II. Аналог функции Кантора в трехмерном пространстве.** Построим классическую функцию Кантора в плоскости  $ZOY$ . Повернем ее вокруг оси  $OZ$ .

В результате мы получили поверхность в трехмерном пространстве. Функцию, задающую эту поверхность, назовем аналогом Канторовой функции в трехмерном пространстве и обозначим ее как  $C^2$ .

$$C^2: A \rightarrow [0,1], \text{ где } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Функция  $C^2$  непрерывна, как композиция непрерывных функций.

**III. Использование теоремы о подграфике.** Функция  $C^2$  непрерывна, значит измерима.

Введем множество

$$V_{C^2} = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in A, t \in [0; C^2(t)]\}$$

называемое подграфиком функции. По теореме о подграфике:



$\lambda_3 B_{C^2} = \int C^2 d\lambda_2$  интеграл по множеству A (2)

Далее применим к (2) теорему о замене в кратном интеграле Лебега.

$$\begin{aligned} & \int C^2(\sqrt{x^2 + y^2}) d\lambda_2(x, y) = \\ & = |\theta = \begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \end{cases}, \theta: (0; 1) \times (0; 2\pi) \rightarrow (0; 1)| = \\ & = \int C^2(\rho, \varphi) \cdot \rho d\lambda_2(\rho, \varphi) \end{aligned}$$

где  $\int C^2(\rho, \varphi) \cdot \rho d\lambda_2(\rho, \varphi)$  по множеству  $U=(0; 1) \times (0; 2\pi)$  (3)

Затем применим к (3) теорему Фубини.

$$\int C^2(\rho, \varphi) \cdot \rho d\lambda_2(\rho, \varphi) = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 C^2(\rho) \cdot \rho d\rho) d\varphi \quad (4)$$

#### IV. Вычисление интеграла (4)

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 t \cdot C(t) dt = \int_0^{\frac{1}{3}} tC(t) dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} tC(t) dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 tC(t) dt$$

Используем симметрию функции Кантора:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} tC(t) dt = \left| t = \frac{s}{3}, dt = \frac{ds}{3}, C(t) = 2C\left(\frac{t}{3}\right) \right| = \frac{1}{18} \int_0^1 sC(s) ds$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{3}}^1 tC(t) dt &= |s = 1 - t, dt = -ds, C(t) + C(1 - t) = 1| = \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} (1 - s)(1 - C(s)) ds = \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} (1 - s) ds - \int_0^{\frac{1}{3}} C(s) ds + \int_0^{\frac{1}{3}} sC(s) ds \end{aligned}$$

Из (1):

$$\int_0^{\frac{1}{3}} C(s) ds = \frac{1}{6} \int_0^1 C(s) ds = \frac{1}{12}$$

После интегрирования констант и переноса интегралов вида  $\int_0^1 t \cdot C(t) dt$  в правую часть равенства получим:

$$\int_0^1 tC(t) dt = \frac{5}{16}$$

Вернемся к интегралу (4)

$$\int_0^{2\pi} (\int_0^1 C^2(\rho) \cdot \rho d\rho) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{5}{16} d\varphi = \frac{5\pi}{8}$$

**Заключение.** Несмотря на кажущуюся простоту интегрирования полученной функции, мы вынуждены

прибегать к тяжелой теории Лебега, такой как замена переменной в интеграле Лебега. Использование теории Римана в этом случае приведет к сложному построению интегральных сумм, в то время как замена сразу приводит нас к результату. Это обстоятельство приводит к пониманию о важности и обширности теории Лебега в области интегрирования вещественнозначных функций.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горин Е.А., Кукушкин Б.Н. Интегралы, связанные с канторовой лестницей // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15., № 3. – С. 188-220.

### INTEGRAL OF THE CANTOR'S FUNCTION ANALOGUE

D.V. Ermokhin, E.G. Lazareva

The National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk,  
Lenin str., 36, 634050

E-mail: [ermohindy@mail.ru](mailto:ermohindy@mail.ru)

**Abstract.** *In present study we consider a classic Cantor's function as a function of two variables in the purpose of finding a Lebesgue measure of its ordinate set. For this purpose, we'll use a Lebesgue's integral theory.*

**Keywords.** *Cantor's function, Lebesgue's integral, Lebesgue's measure.*

УДК 536.24

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ  
ТАЯНИЯ ВЛАЖНОГО ГРУНТА В УСЛОВИЯХ  
ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ**

М.С. Ерошкина, Н.С. Бондарева

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [eroshkinamaria03@gmail.com](mailto:eroshkinamaria03@gmail.com)

***Аннотация.** Задачи теплопереноса с фазовыми переходами «твердое тело – жидкость» имеют широкий спектр технических приложений. Настоящее исследование было посвящено изучению процессов теплопереноса и таяния воды в слое грунта. Математическая модель была сформулирована с использованием сглаживающей функции, позволяющей перейти от двух уравнений теплопроводности для твердого и жидкого состояний вещества в энтальпийной формулировке, к единому уравнению в переменной температуры избежать поиска межфазной границы на каждом временном слое. Задача была решена методом конечных разностей со сглаживанием функции энтальпии на межфазной границе. В результате были получены распределения температур по глубине грунта в зависимости от внешних тепловых условий, а также положение межфазной границы с течением времени.*

***Ключевые слова.** Теплоперенос, фазовый переход, условие Стефана, межфазная граница, скрытая теплота.*

**Введение.** Таяние и промерзание грунтов играют важную роль в геологических процессах, таких как эрозия и образование горных пород; в аграрной сфере, где они влияют на качество почвы и урожайность растений; в изменении климата. Задачи теплопереноса с фазовыми превращениями имеют практическое значение для различных отраслей промышленности, таких как строительство и добыча полезных

ископаемых. Численные исследования позволяют получать подробные данные о процессах фазовых переходов, отслеживать межфазные границы и прогнозировать тепловые состояния систем.

Процесс таяния и замерзания воды в слое грунта является одним из примеров задачи Стефана, когда рассматривается подвижная граница раздела фаз и поглощение или высвобождение скрытой теплоты. Так как это задача с подвижной границей, то необходимо учитывать положение границы фазового перехода в каждый момент времени. Классическая задача Стефана описывается двумя уравнениями теплопроводности для каждой из фаз материала. Граничная область определяется балансом энергии – условием Стефана, которое связывает энергию, выделяемую во время изменения фазы, со скоростью перемещения границы раздела сред [1,2].

Целью данного исследования является изучение процессов теплопереноса в слое грунта при фазовом переходе. Задача была решена с использованием метода конечных разностей и сглаживанием функции энтальпии на межфазной границе. В результате были получены распределения температур по глубине грунта в зависимости от внешних тепловых условий.

**Постановка задачи.** В качестве области вычисления рассматривался слой влажного грунта толщиной  $L$  (рисунок 1), на верхней границе которого было установлено условие конвективного теплообмена с окружающей средой. Температура окружающей среды  $T_H$  была постоянной, выше температуры таяния льда. В начальный момент времени грунт находился в твердом состоянии и имел начальную температуру по всей глубине, равную  $T_0$ . Коэффициент теплообмена с окружающей средой считался постоянным. На нижней границе  $x = L$  рассматривалось условие теплоизоляции. Предполагалось также, что теплофизические свойства в пределах одной фазы

постоянны, а перенос тепла в грунте происходит только вследствие теплопроводности.

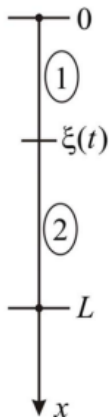


Рис. 1. Рассматриваемая область решения [3], где

1 – талый слой грунта (liquid),  $0 \leq x \leq \xi(t)$ ;

2 – замерзший слой грунта (solid),  $\xi(t) \leq x \leq L$ ;

$\xi(t)$  – положение межфазной границы.

Математическую модель процесса теплопереноса и таяния льда в слое грунта можно записать через следующие уравнения теплопроводности в энтальпийной формулировке:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \lambda_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь в качестве граничного условия на межфазной границе выступает условие Стефана  $\left[ k \frac{\partial T}{\partial n} \right] = -L_F V_n$ , где  $L_F$  – энтальпия фазового перехода,  $V_n$  – скорость движения

межфазной границы по нормали к поверхности [3,4]. В одномерном случае условие Стефана принимает вид:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \rho L_F w \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

где  $w$  – влажность грунта, а  $\xi$  – положение межфазной границы.

Энтальпия определяется температурой среды согласно уравнению:

$$h = \begin{cases} \rho_s c_s T, & T < T_F; \\ \rho_s c_s T_F + \rho_l L_F + \rho_l c_l (T - T_F), & T \geq T_F. \end{cases}$$

Для упрощения решения задачи введем функцию сглаживания, которая определяет долю расплава в микрообъеме:

$$\varphi = \begin{cases} 0, & T < -\eta; \\ \frac{T + \eta}{2\eta}, & -\eta \leq T \leq \eta; \\ 1, & T > \eta. \end{cases}$$

Со сглаживанием перехода энтальпии с помощью функции  $\varphi(T)$  система уравнений (1) с граничным условием Стефана преобразуется к виду:

$$\alpha(\varphi) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_l L_F w \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \kappa(\varphi) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где функции  $\kappa(\varphi)$  и  $\alpha(\varphi)$  определяют сглаживание перехода теплофизических параметров:

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \rho_s c_s + \varphi(\rho_l c_l - \rho_s c_s), \\ \kappa(\varphi) &= k_s + \varphi(k_l - k_s). \end{aligned}$$

Определим начальные и граничные условия:

- В начальный момент времени:

$$t = 0: T(x) = T_0, 0 \leq x \leq L.$$

- На верхней границе:

$$x = 0: \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T_H - T), t > 0, \alpha > 0.$$

- На нижней границе:

$$x = L: \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t > 0.$$

Нестационарная задача теплопроводности (2) с соответствующими начальными и граничными условиями решалась с использованием аппроксимации конечными разностями со вторым порядком точности для производных по пространству [3]. Алгоритм был протестирован на одномерной задаче Стефана [1] и показал хорошее согласование с результатами других авторов. На рисунке 2 представлено сравнение распределения температур в процессе промерзания влажного грунта при изотермических граничных условиях.

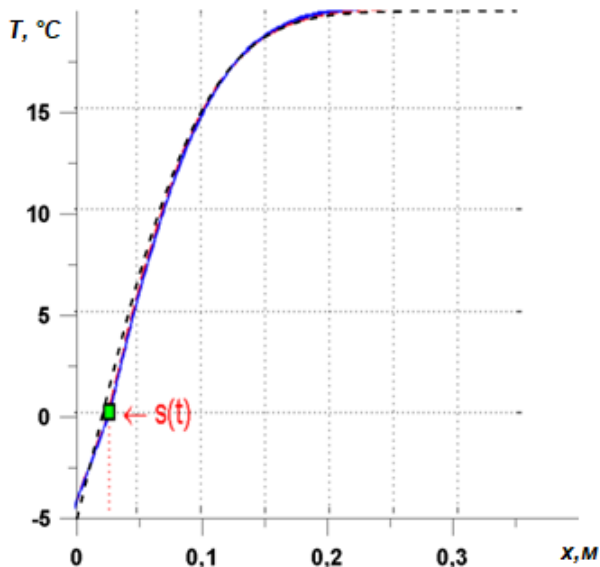


Рис. 2. Сравнение температурных распределений для задачи промерзания грунта: пунктирная линия – результаты полученные с использованием представленного алгоритма, сплошная линия – результаты, полученные в [1].

**Анализ полученных результатов.** Был рассмотрен слой грунта толщиной  $L = 0.3$  м. В качестве теплофизических характеристик для талой зоны грунта рассматривались следующие: теплопроводность  $\lambda_l = 0.6 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , плотность  $\rho_l = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ , теплоемкость  $c_l = 4220 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ; для промерзшей зоны грунта:  $\lambda_s = 2.3 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $\rho_s = 917 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $c_s = 2090 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ . Начальная температура грунта была выбрана  $T_0 = -5^\circ\text{C}$ , температура верхней границы в изотермическом случае и внешней среды в случае воздушной конвекции была равна  $T_H = 20^\circ\text{C}$ . Энтальпия фазового перехода для воды равна  $L_F = 3.32 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$ . В задаче влажность грунта рассматривалась равной  $w = 0.5 \text{ кг}/\text{кг}$ .

В результате вычислений было получено распределение температур по глубине грунта в различные моменты времени для случая с изотермической поверхностью и случая воздушного конвективного теплообмена с окружающей средой. На рисунке 3 представлены распределения температуры по глубине грунта в разные моменты времени при изотермическом нагревании  $T_H = 20^\circ\text{C}$ . Изотермическое граничное условие способствует быстрому нагреванию в пределах растаявшей области, однако все графики имеют излом в точке фазового перехода. Процесс таяния более медленный и на межфазной границе поглощается большое количество энергии, поэтому градиент температуры в верхнем слое выше, в то время как с увеличением глубины профили температуры становятся более пологими. Из графиков видно, что на участке 1 распределение температуры имеет линейный характер, а на участке 2, соответственно, нелинейный. Это можно объяснить тем, что на нижней границе было установлено граничное условие второго рода – условие теплоизоляции.



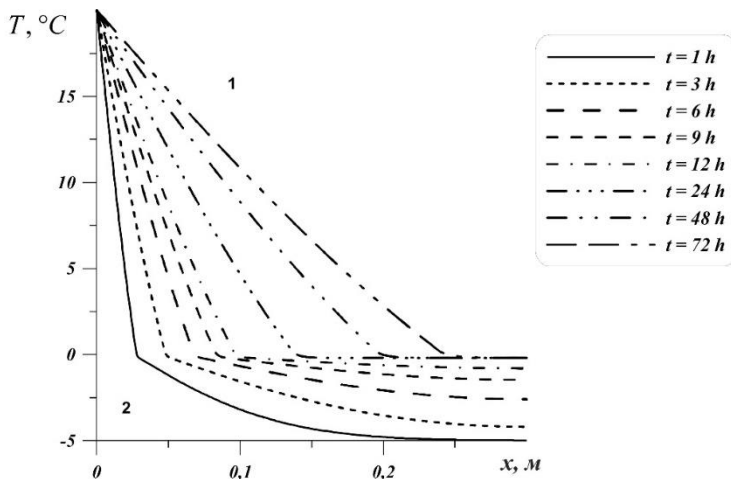


Рис.3. Поле температур в различные моменты времени.

На рисунке 4 представлены профили температуры в случаях конвективного теплообмена с окружающей средой, то есть граничное условие первого рода на границе  $x = 0$  было заменено граничным условием третьего рода – условием конвективного теплообмена с окружающей средой, а именно

$$x = 0: \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T_H - T), t > 0, \alpha > 0.$$

Были получены распределения температур в зависимости от значений коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  для различных моментов времени. Из полученных результатов можно заключить, что, чем больше коэффициент теплоотдачи, тем быстрее тает мерзлая часть грунта. Однако, если сравнивать с результатами, которые были получены ранее при постоянной температуре на границе  $x = 0$ , то здесь процесс происходит медленнее. Температура поверхности оказывается ниже с уменьшением коэффициента  $\alpha$ , разница на более поздних этапах превышает  $5^\circ\text{C}$ . При этом в области с твердым грунтом,

профили температуры практически совпадают с ростом глубины.

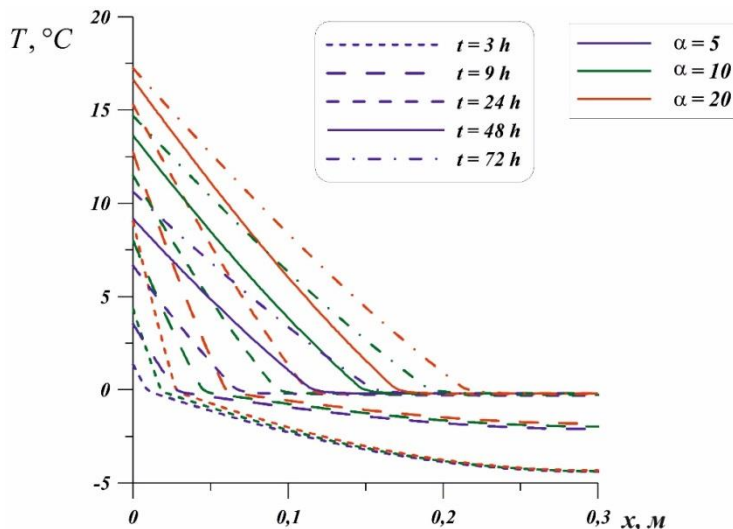


Рис. 4. Влияние коэффициента теплоотдачи на поле температур.

На рисунке 5 изображен график зависимости положения межфазной границы  $\zeta(t)$  от времени для разных  $\alpha$ . Видно, что основная разница в положении точки плавления возникает на первых этапах таяния, однако, по мере удаления границы от поверхности фронт таяния движется примерно с одинаковой скоростью. К концу расчетного времени разница почти 6 см.

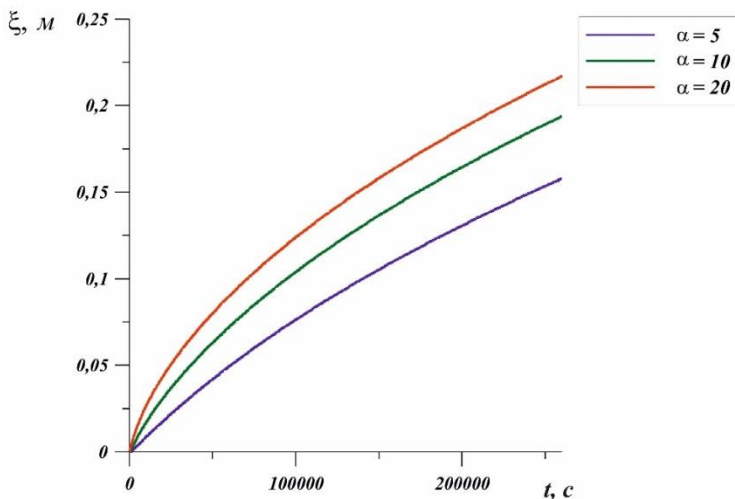


Рис. 5. Положение межфазной границы с течением времени.

**Заключение.** Проведено численное исследование процессов таяния влажного грунта при условии воздушной конвекции на поверхности. В результате проведенных вычислений были получены распределения температур по глубине грунта в зависимости от внешних тепловых условий, а также положение границы фазового перехода в каждый момент времени. Показано, что в условиях теплообмена с окружающей средой большое влияние на скорость таяния оказывает коэффициент теплоотдачи. Поверхность прогревается медленно и разница температурна поверхности для случаев  $\alpha = 5 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  и  $\alpha = 20 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  превышает  $5^\circ\text{C}$ . При этом положение фронта плавления в конечный момент времени может различаться практически на 6 см.

Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского научного фонда (22–79–10341).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

2. Алипова К.А., Богословский Н.Н. Задача Стефана для уравнения теплопроводности // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: сборник статей. – Томск, 2016. – С. 92-99.
3. Myers T.G., Hennessy M.G., Calvo-Schwarzwalder M. The Stefan problem with variable thermophysical properties and phase change temperature // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2020. – Vol. 149. – P. 118975.
4. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – С. 128-140.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – С. 50-52.

### NUMERICAL SOLVING OF THE TWO-PHASE PROBLEM OF MELTING WET SOIL UNDER CONDITIONS OF HEAT TRANSFER WITH THE ENVIRONMENT

M.S. Eroshkina, N.S. Bondareva

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [eroshkinamaria03@gmail.com](mailto:eroshkinamaria03@gmail.com)

***Abstract.** Heat transfer problems with “solid-liquid” phase transitions have a wide range of technical applications. The present study was devoted to the processes of heat transfer and water melting in the soil layer. The mathematical model was formulated using a smoothing function, which makes it possible to switch from two heat conduction equations in the enthalpy formulation for the solid and liquid to a single equation in the variable temperature. The problem was solved by the finite difference method with smoothing of the enthalpy function at the interface. As a result, temperature*

*distributions over the depth of the soil depending on external thermal conditions, as well as the position of the interfacial boundary over time were obtained.*

**Keywords.** *Heat transfer, phase transition, Stefan condition, interphase boundary, latent heat.*

УДК 510.64

## **ЛИНЕЙНАЯ ВРЕМЕННАЯ ЛОГИКА ЗНАНИЯ LTK.SL: СЕМАНТИКА И ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ**

Т.Ю. Зверева, С.И. Башмаков

ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, 660018

E-mail: [3336259@gmail.com](mailto:3336259@gmail.com)

***Аннотация.** В работе рассматривается временная логика знания ступенчатого времени, доказано свойство финитной аппроксимируемости, проективная унификация и описаны свойства фреймов логики.*

***Ключевые слова.** Модальные логики, временные логики, свойство конечной модели, финитная аппроксимируемость, линейное время, реляционная семантика Крипке, многоагентная логика*

**Введение.** Логические системы, язык которых включает различные модальные операторы, с середины XX века интересуют исследователей в области неклассических логик, философии, юриспруденции, проектирования информационных систем и других областей знания.

В настоящее время одним из перспективных направлений в области неклассических логик является рассмотрение нетранзитивных систем, предусматривающих рассуждения о знаниях. В исследуемой логике в качестве семантического описания временного процесса выбран «ступенчатый» дискретный переход между временными состояниями — сгустками элементов, заданный подходящим временным оператором  $N$ . Ранее нами уже была рассмотрена многоагентная версия такой логики с дополнительным оператором «универсальной модальности». Задачей нового исследования стало описание семантики логики, сохраняющей «пошаговую» нетранзитивную структуру построения

временного процесса, а также основных свойств фреймов, но исключаящую универсальную модальность.

Язык логики **LTK.sl** включает нереклексивную нетранзитивную временную модальность, модальности знаний агентов и модальность эквивалентности на сгустках элементов.

Актуальность новых исследований обуславливается необходимостью поиска эффективных инструментов проектирования и рассуждения об информационных процессах, связанного с новыми вызовами и требованиями к реализации передачи информации. В частности, в настоящее время наиболее актуальным направлением в этой области является рассмотрение нетранзитивных систем, предусматривающих рассуждения о знаниях.

Наличие специального условия на нетранзитивность и также нереклексивность отношений в системе подразумевает необходимость поиска принципиально новых подходов к анализу свойств логики в сравнении с транзитивными вариантами, достаточно хорошо исследованными ранее [1].

Одной из таких проблем является метод *проективных формул*, уже по своему определению требующий транзитивное отношение между элементами модели. Введение в язык логики универсальной модальности позволило использовать её, как альтернативу стандартному оператору необходимости и доказать проективность унификации в логике [2].

Задачей нового исследования стало описание семантики логики, сохраняющей «пошаговую» нетранзитивную структуру построения временного процесса, а также основных свойств фреймов, но исключаящую универсальную модальность.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).*

**Семантика LTK.sl.** Язык логики **L<sup>LTK.sl</sup>** включает такие унарные модальные операторы, как:  $N$  – нереклексивная нетранзитивная модальность,  $\square_1, \dots, \square_n$  – модальности знаний

агентов,  $\square_e$  – модальность эквивалентности на сгустках элементов.

**LTK.sl**-фреймом назовём набор

$$F := \langle W_N, \text{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle,$$

где —  $W_N = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_t$  – не пересекающееся объединение сгустков  $C_t$ , пронумерованных натуральными числами:  $C_{t_1} \cap C_{t_2} = \emptyset$ , если  $t_1 \neq t_2$ ;

—  $\text{Next}$  – отношение «следующее натуральное число»:  $\forall a, b \in W : a \text{Next} b \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N} (a \in C_t \ \& \ b \in C_{t+1})$ ;

—  $R_1, \dots, R_n$  – отношения знаний агентов, каждое из которых задаёт своё отношение эквивалентности для отдельного агента внутри каждого момента времени (сгустка);

—  $R_e$  – отношение эквивалентности на каждом сгустке.

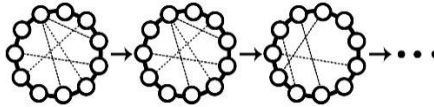


Рис.1 LTK.sl-фрейм

**Определение 1.** Моделью на фрейме  $F$  назовём  $M = \langle F, V \rangle$ ,

где  $F$  – **LTK.sl**-фрейм,  $V$  – означивание:  $P \rightarrow 2W_N$

**Определение 2.** Логикой **LTK.sl** назовём множество всех формул языка  $L^{LTK.sl}$  выполнимых на всех фреймах  $F : L^{LTK.sl} := \{A \in For(L^{LTK.sl}) \mid \forall F \in K : F \models A\}$ .

**Свойство конечной модели.** Чтобы доказать, что логика **LTK.sl** финитно аппроксимируема, определим  $p$ -морфное отображение конечной **LTK.sl**-модели  $M$  на конечную по времени и, используя технику фильтрации сгустков, нами была построена модель со сгустками конечной мощности на  $p$ -морфном варианте. Следующие утверждения доказывают, что такая модель сохраняет истинность формул нашей логики.



**Теорема 1.** Любая  $F_{fin}$  является  $p$ -морфным образом  $F_{inf}$

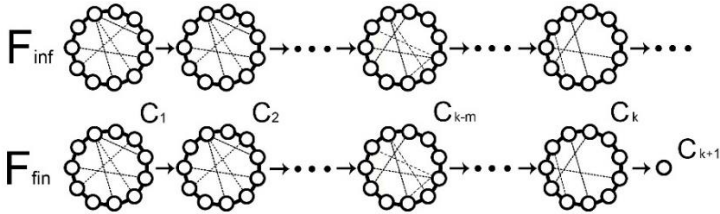


Рис 2. Бесконечный фрейм  $F_{inf}$  и фрейм конечной длины  $F_{fin}$

Чтобы завершить построение конечной модели, адекватной нашей логике, применим технику фильтрации к фрейму  $F_{fin}$ .

Пусть  $M = \langle W, Next, Re, R_1, \dots, R_n, V \rangle$  — модель, построенная на бесконечном  $LTK.sl$ -фрейме, определённая ранее,  $\Phi \subseteq For(LTK.sl)$  — набор формул, замкнутых относительно подформул. Определим отношение эквивалентности  $\equiv_{\Phi}$  на сгустках из  $W$  следующим образом:  $\forall t \in N, \forall x, y \in Ct \ x \equiv_{\Phi} y \Leftrightarrow [\forall \alpha \in \Phi (\langle M, x \rangle \models \alpha \Leftrightarrow \langle M, y \rangle \models \alpha)]$ .

В соответствии с этим определением далее будем использовать обозначение

- $Var(\Phi)$  для набора всех переменных формул из  $\Phi$ ;
- $[x]_{\equiv_{\Phi}} := \{y \in W \mid x \equiv_{\Phi} y\}$  для классов эквивалентности;
- $W_{\Phi} := \{[x]_{\equiv_{\Phi}} \mid \forall x \in W\}$  для набора всех таких классов;
- $C_j_{\Phi} := \{[x]_{\equiv_{\Phi}} \mid \forall x \in C_j \subset Ffin\}$ ,  $j \in [1, k+1]$ , для каждого сгустка таких классов, полученных из сгустков  $Ffin$ .

В силу построения фильтрованной модели, верна следующая лемма

**Лемма 1.** Пусть  $N = \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, Next', R'e, R'_1, \dots, R'_n, V' \rangle$  это  $p$ -морфная модель бесконечной  $LTK.sl$ -модели  $M$ ,  $\Phi \subseteq For(LTK.sl)$  — замкнутое относительно подформул

множество формул, модальная степень которых не превосходит  $m$  ( $m \in \omega$ ,  $k > m$ ),  $N_\Phi = \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \text{Next}'_\Phi, R'_e\Phi, R'_{1\Phi}, \dots, R'_{n\Phi}, V'_\Phi \rangle$  — фильтрованный вариант модели  $N$  множеством  $\Phi$ . Тогда  $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k-m]} C_j, \forall \alpha \in \Phi: \langle N, x \rangle /|= \alpha \Leftrightarrow \langle N_\Phi, x \rangle /|= \alpha$ .

Суммарно выполнение утверждений в Теореме 1 и Лемме 1 доказывает свойство финитной аппроксимации в логике.

**Унификация в  $LTK.sl$ .** Для изучения свойств проективной унификации в  $LTK.sl$  необходимо переопределить понятие проективной формулы и, соответственно, проективной подстановки. Это необходимость связана с природой временного отношения в нашей логике, выраженного в семантике нереклексивным и нереклексивным оператором  $N$ . В классическом определении отношение, соответствующее модальному оператору необходимости, должно быть транзитивным.

Следующая теорема показывает, что унифицируемость произвольной формулы  $\phi(p_1, \dots, p_s)$  в  $LTK.sl$  может быть эффективно установлена с помощью корневого унификатора, полученного путём подстановки констант:  $\forall p_i \in V \text{ ar}(\phi) \sigma(p_i) \in \{T, \perp\}$ .

**Теорема 3.** Если формула  $\phi$  унифицируема в  $LTK.sl$ , то  $\phi$  имеет корневой унификатор.

Это вспомогательное утверждение используется при доказательстве основной теоремы об унификации в логике.

**Теорема 4.** Любая унифицируемая формула в  $LTK.sl$  проективна.

**Свойства  $LTK.sl$ -фреймов.** Отталкиваясь от определения  $LTK.sl$ -фреймов, случай рассматриваемой логики имеет ряд важных особенностей, обусловленных природой временного отношения. Опишем свойства  $LTK.sl$  фреймов:

**1.** Для любых  $x, y \in W_N$  верно, что  $\exists x_1, \dots, x_n$ , т.ч.  $x R_e x_1 \text{ Next} \dots \text{ Next } x_n R_e y$  или  $y R_e x_1 \text{ Next} \dots \text{ Next } x_n R_e x$ . В частности, при  $n=1$   $x R_e y$ ;

2.  $Re$  рефлексивное отношение;
3.  $Re$  симметричное отношение;
4.  $Re$  транзитивное отношение;
5. Если  $x N ext y$  и  $x N ext z$ , то  $y Re z$ ;
6. Если  $x N ext y$  и  $x Re z$ , то  $z N ext y$ ;
7.  $Ri$  ( $1 \leq i \leq n$ ) рефлексивные отношения;
8.  $Ri$  ( $1 \leq i \leq n$ ) симметричные отношения;
9.  $Ri$  ( $1 \leq i \leq n$ ) транзитивные отношения.

Свойства, требующие дополнительного обоснования, сформулируем отдельно.

**Предложение 1.** Для  $LTK.sl$ -фрейма справедливы следующие свойства:

10. если  $x Re y$ , то  $\neg x Next y$ ;
11. если  $x Ri y$ , то  $x Re y$ ;
12. если  $x N ext y N ext z$ , то  $\neg x N ext z$ ;
13. если  $x N ext y$ , то  $\neg x Re y$ .

Перспективами дальнейших исследований является рассмотрение задачи формульной характеристики свойств  $LTK.sl$ -фреймов модальными формулами и вопросы разрешимости в логике.

### Список литературы

1. *Bashmakov, S.I.* Unification in linear modal logic on non-transitive time with universal modality // J. SibFU. Mathematics and Physics. 2018. №. 1, p. 3-9.
2. *Bashmakov, S.I., Zvereva T.Yu.* Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality // Bulletin of the Section of Logic. 2022. №. 51/3, p. 345–361

### **LINEAR TIME LOGIC OF KNOWLEDGE LTK.SL: SEMANTICS AND FINITE APPROXIMABILITY**

T.Yu. Zvereva, S.I. Bashmakov

Siberian Federal University, Russia, Krasnoyarsk, Svobodny pr., 79,  
660041

E-mail: [3336259@gmail.com](mailto:3336259@gmail.com)

**Abstract.** *The paper considers the temporal logic of knowledge of step time, proves the property of finite approximability, projective unification, and describes the properties of frames of logic.*

**Keywords.** *Modal logics, temporal logics, finite model property, finite approximability, linear time, Kripke relational semantics, multi-agent logic.*

УДК 536.24

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ  
ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОБОГРЕВАЕМОЙ ОБЛАСТИ**

К.И. Кириллова, Н.С. Бондарева

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина 36, 634050

E-mail: [ksukirill3@gmail.com](mailto:ksukirill3@gmail.com)

***Аннотация.** В данном исследовании рассматривается плоская задача сопряженной естественной конвекции в замкнутой квадратной области. Левая стенка полости была сопряжена с твердой теплопроводной стенкой, которая нагревалась от изотермической границы. Правая стенка полости охлаждалась при постоянной температуре, горизонтальные границы области считались адиабатическими. Естественная конвекция, возникающая из-за разности температур, считалась ламинарной и описывалась с использованием приближения Буссинеска. Уравнения сохранения массы, импульса и энергии были сформулированы в переменных: функция тока, завихренность и температура; и решались с использованием метода конечных разностей. Были проведены исследования влияния числа Рэлея, соотношения теплопроводностей на режимы теплопереноса в полости.*

***Ключевые слова.** Сопряженная задача, естественная конвекция, численное исследование, метод конечных разностей*

**Введение.** Конвективный теплоперенос встречается во многих технологических процессах, связанных с теплоотведением, накапливанием и хранением энергии. Изучение естественной конвекции помогает лучше понять и оптимизировать процессы теплопереноса в энергетических установках, строительных сооружениях и электронных элементах [1–4]. Часто, экспериментальные

исследования дорогостоящи и не дают подробную информацию о тепловых и гидродинамических распределениях, поэтому разработка новых методов и моделей для описания естественной конвекции является одной из актуальных задач современной науки.

Теплоперенос в замкнутых областях открывает широкий класс задач, связанных с более сложными системами. Изучение процессов теплообмена в областях с простой геометрией позволяет раскрыть основные особенности явления конвективного теплопереноса и определить фундаментальное влияние рассматриваемых параметров [3–5].

Настоящее исследование посвящено сопряженной задаче естественной конвекции в замкнутой дифференциально–обогреваемой квадратной полости. Математическая постановка была сформулирована в безразмерных преобразованных переменных: функция тока, завихренность и температура. Решение краевой задачи было получено на основе метода конечных разностей. Были проведены исследования влияния числа Рэлея, соотношения теплопроводностей на режимы теплопереноса в полости.

**Математическая модель.** В настоящей работе рассматривается задача естественной конвекции в замкнутой квадратной полости. Левая стенка полости сопряжена с твердой теплопроводной стенкой, которая нагревалась от изотермической границы с температурой  $T_H$ . Правая стенка полости охлаждалась при постоянной температуре  $T_C$ , горизонтальные границы области считались адиабатическими. Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси  $y$  (рисунок 1). Предполагается, что течение, развивающееся в рассматриваемой области, ламинарно и сила плавучести может быть описана с использованием приближения Буссинеска.

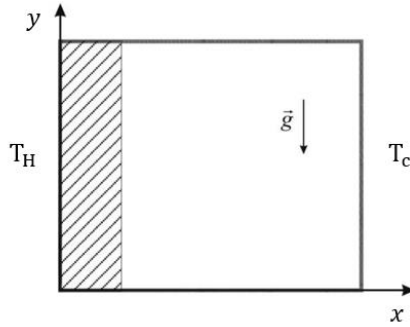


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи

Для данной постановки система уравнений Обербека – Буссинеска в естественных переменных «скорость – давление» будет иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_c) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda_f}{\rho_f c_f} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Уравнение теплопроводности в твердой стенке будет иметь вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_s}{\rho_s c_s} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

Здесь  $x$ ,  $y$  – декартовы координаты;  $t$  – время;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $\beta$  – коэффициент температурного расширения;  $\rho$  – плотность;  $u$ ,  $v$  – горизонтальная и

вертикальные компоненты вектора скорости;  $p$  – давление;  $T$  – температура;  $\lambda_f, \lambda_s$  – коэффициенты теплопроводностей жидкости и твердой стенки, соответственно;  $c_f, c_s$  – теплоемкости жидкости и твердой стенки, соответственно.

Переход к преобразованным переменным «функция тока – завихренность» осуществляется с учетом следующих соотношений:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Система дифференциальных уравнений решалась в безразмерных переменных: в качестве масштаба длины была выбрана высота полости  $H$ , в качестве масштаба скорости  $V_0 = \sqrt{g\beta\Delta TH}$ , безразмерная переменная времени определялась как  $\tau = tV_0/H$ , безразмерные переменные функция тока и завихренность определялись из соотношений  $\Psi = \psi/(V_0L)$  и  $\Omega = \omega L/V_0$ , соответственно. Безразмерная температура определялась как:  $\Theta = (T - T_C)/(T_H - T_C)$ .

Таким образом, система уравнений (1) – (4) в безразмерных преобразованных переменных принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \sqrt{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (8)$$

Безразмерное уравнение теплопроводности для твердой стенки примет вид:



$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a_s/a_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (9)$$

Здесь  $Pr = \frac{\nu}{a}$  – число Прандтля и  $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu a_f}$  – число

Рэлея.

Сформулированные дифференциальные уравнения (6) – (9) были дополнены следующими граничными условиями:

$$Y = 0 \text{ и } Y = 1, 0 \leq X \leq 1 + d', \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Psi = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$X = 0, 0 \leq Y \leq 1, \Theta = 1;$$

$$X = 1 + d', 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0;$$

$$X = d', 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial X}.$$

В начальный момент времени температура во всей области была равна температуре холодной стенки  $\Theta = 0$ , среда была неподвижна  $\Psi = 0$ ,  $\Omega = 0$ . На всех границах области выполняются следующие гидродинамические условия:  $\Psi = 0$ ,  $\Omega = -\nabla^2 \Psi$ .

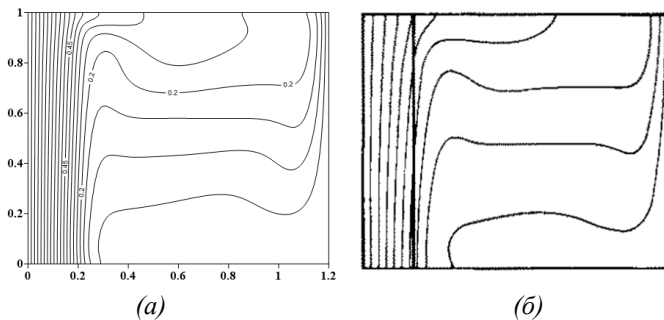


Рис.2. Сравнение полученных результатов с численными данными [8]:

(а) – полученные результаты; (б) – результаты [8]

Для решения уравнений (6) – (9) с начальными и граничными условиями использовалась аппроксимация с помощью метода конечных разностей. Приближение производных производилось со вторым порядком точности по пространству и с первым порядком точности по времени. Разностное уравнение Пуассона для функции тока решалось с помощью метода нижней релаксации. Уравнения (7) – (9) были решены с использованием локально-одномерной схемы А.А. Самарского. Полученные результаты хорошо согласуются с данными, предоставленными в исследовании [8]. Сравнение результатов при следующих входных данных  $Pr = 0.7, Ra = 10^6, d/H = 0.2, \lambda_f/\lambda_s = 1$  представлено на Рис.2.

В рамках рассматриваемой задачи было проанализировано влияние сетки на полученные результаты. Рассматривались следующие прямоугольные равномерные сетки (Рисунок 3):  $241 \times 201$ ,  $121 \times 101$  и  $61 \times 51$ . Исходя из полученных данных, было принято решение проводить дальнейшие вычисления на сетке  $121 \times 101$ , поскольку результаты не сильно отклоняются от наиболее точной сетки и требует меньшей мощности компьютера.

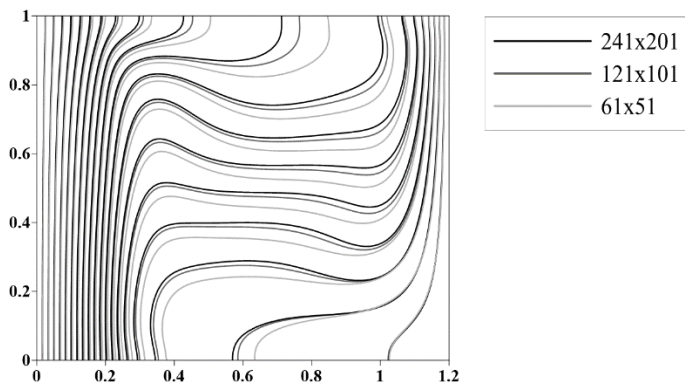


Рис. 3. Влияние сетки на распределение температур в области

**Результаты численного моделирования.** В результате вычислений были получены локальные и интегральные характеристики теплообмена в диапазоне изменения чисел Рэля от  $10^3$  до  $10^5$  и соотношений теплопроводностей среды и стенки  $\lambda_f/\lambda_s = 0.1, 1$  и  $10$ . Безразмерная толщина левой стенки была зафиксирована  $d/H = 0,2$ . Число Прандтля было выбрано равным  $0.71$ , что соответствует свойствам воздушной среды.

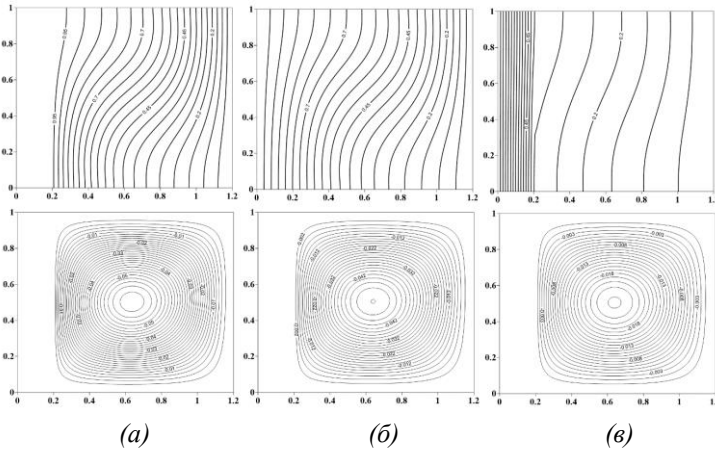


Рис.4. Поля температур и линии тока при  $Ra = 10^3$  для различных соотношений теплопроводностей:

$$(a) \frac{\lambda_f}{\lambda_s} = 0.1; (б) \frac{\lambda_f}{\lambda_s} = 1; (в) \frac{\lambda_f}{\lambda_s} = 10.$$

На рисунке 4 представлены изотермы и линии тока в фиксированный момент времени  $\tau = 100$  для числа Рэля  $Ra = 10^3$  и различных соотношений теплопроводностей  $\lambda_f/\lambda_s$ . Картина течения одинаковая для всех случаев  $\lambda_f/\lambda_s$ : линии тока равномерно расположены вокруг круглого ядра. Однако, интенсивность циркуляции уменьшается с увеличением относительной теплопроводности среды (рисунок 4в), это объясняется тем, что наибольший градиент температур в этом

случае наблюдается в твердой стенке. перепад температур в полости ниже и интенсивность конвективного теплопереноса ниже, чем в случаях  $\lambda_f/\lambda_s \leq 1$ . Число Рэлея небольшое и изотермы умеренно изогнуты.

Повышение числа Рэлея приводит к тому, что термогравитационная конвекция становится преобладающим механизмом переноса тепла в полости (Рисунок 5). Поле температур изменяется за счет интенсивной циркуляции в среде: нагретые слои поднимаются вверх, прогревая верхнюю часть полости, в результате чего появляется вертикальная температурная стратификация. Для случаев  $\lambda_f/\lambda_s = 0.1$  и  $\lambda_f/\lambda_s = 1$  центр конвективного вихря раздваивается за счет вытягивания ядра в горизонтальном направлении (рисунок 5а,б). При этом сгущение линий тока наблюдается вблизи вертикальных поверхностей. Увеличение относительной теплопроводности среды приводит к смещению изотерм в твердую теплопроводную стенку и изменению гидродинамической картины (рисунок 5в).

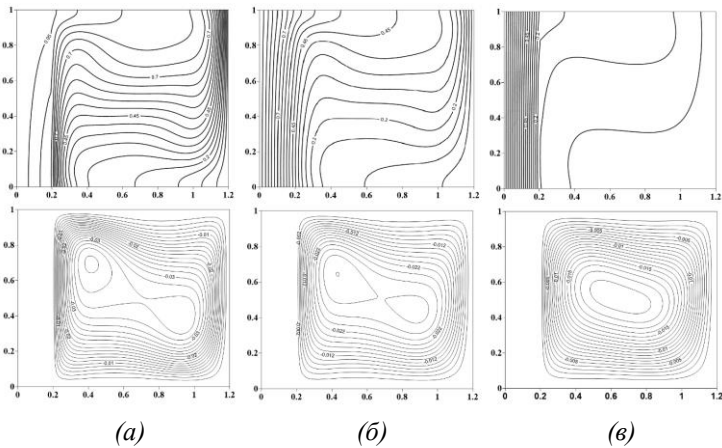


Рис.5. Поля температур и линии тока при  $Ra = 10^5$  для различных соотношений теплопроводностей:

$$(a) \frac{\lambda_f}{\lambda_s} = 0.1; (\bar{b}) \frac{\lambda_f}{\lambda_s} = 1; (\bar{c}) \frac{\lambda_f}{\lambda_s} = 10.$$

В ходе решения также были получены интегральные значения числа Нуссельта на поверхности теплопроводной стенки  $Nu = \int_0^1 \left| \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=\frac{d}{H}} dY$ . На рисунке 6 представлены

зависимости  $Nu$  от времени при различных отношениях теплопроводности и значениях числа Рэлея. Из графиков видно, что на механизм теплопереноса большее влияние оказывает относительная теплопроводность среды, чем значение  $Ra$ . Увеличение числа Рэлея характеризуется интенсификацией массопереноса и, как следствие, увеличением интегрального числа Нуссельта. Наибольшие значения  $Nu$  наблюдаются в случае  $Ra = 10^5$  при  $\lambda_f/\lambda_s = 0.1$ .

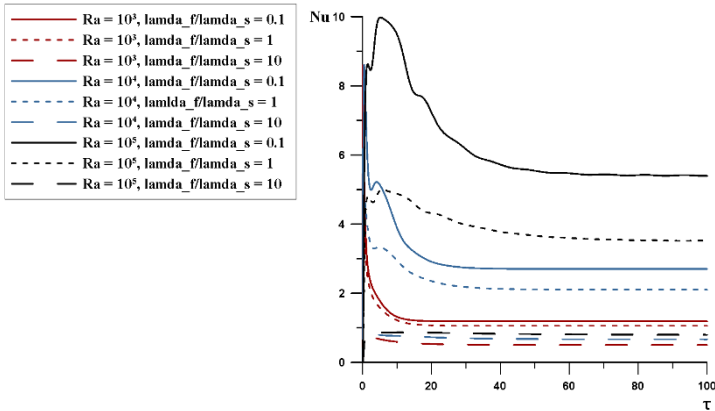


Рис.6. График зависимости интегрального Нуссельта на поверхности стенки от времени при различных отношениях теплопроводности и числах  $Ra$ .

На рисунке 7 представлены графики зависимости температуры и локального числа Нуссельта на поверхности стенки от высоты при различных теплопроводностях и числах Рэлея в момент времени  $\tau = 100$ . Так как жидкость нагревается, поднимаясь вдоль нагретой стенки, в нижней части наблюдается наибольший градиент температуры. При высокой теплопроводности стенки, безразмерная температура поверхности близка к 1, что приводит к интенсификации естественной конвекции. И наоборот, снижение теплопроводности стенки приводит к снижению температуры поверхности до значений близких к 0.2, при этом значения локального числа Нуссельта снижаются ниже 1.

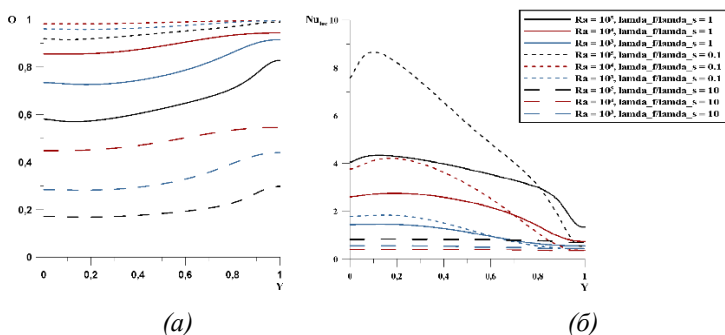


Рис. 7. (а) – график зависимости температуры на поверхности стенки от высоты при различных отношениях теплопроводности и числах  $Ra$ ; (б) – график зависимости локального Нуссельта на поверхности стенки от высоты при различных отношениях теплопроводности и числах  $Ra$ .

**Заключение.** В результате проведенных исследований было проанализировано влияние соотношения коэффициентов теплопроводностей на режимы теплопереноса в замкнутой квадратной области. Было показано, что естественная конвекция усиливается при увеличении числа Рэлея и уменьшении

соотношения теплопроводностей. Увеличение теплопроводности стенки приводит к смещению изотерм в полости и интенсификации конвективного массопереноса. Уменьшение относительной теплопроводности стенки приводит к смещению изотерм в область стенки, в результате чего температурный напор в области снижается и наблюдаются ослабление естественной конвекции.

Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского научного фонда (22–79–10341).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belazizia, A., Abboudi, S., & Benissaad, S. (2015). Conjugate natural convection in a square enclosure under horizontal magnetic field effect. *Mechanics & Industry*, 16(4), 409.
2. Wan D.C., Patnaik B.S.V., Wei G.W. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution // *Numerical Heat Transfer. Part B.* – 2001. – Vol. 40. – Pp. 199–228.
3. Mayne D.A., Usmani A.S., Crapper M. H-adaptive finite element solution of high Rayleigh number thermally driven cavity problem // *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow.* – 2000. – Vol. 10. – Pp. 598–615.
4. Dixit H.N., Babu V. Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* – 2006. – Vol. 49. – Pp. 727–739.
5. G. De Vahl Davis Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity/ *int. J. Heat Mass Transfer.* Vol. 111, pp. 1675–1693. Pergamon Press 1968. Printed in Great Britain.
6. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
8. D.A. Kaminski, C. Prakash, Conjugate natural convection in a square enclosure: effect of conduction in one of the vertical walls, Int. J. Heat Mass transfer 12 (1986) 1979–1988

## NUMERICAL INVESTIGATION OF CONJUGATE NATURAL CONVECTION IN A CLOSED DIFFERENTIALLY HEATED CAVITY

K.I. Kirillova, N.S. Bondareva

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [ksukirill3@gmail.com](mailto:ksukirill3@gmail.com)

***Abstract.** In this study, a two-dimensional problem of conjugate natural convection in a closed square cavity is considered. The left wall of the cavity was bordered on a solid heat-conducting wall, which was heated from the isothermal boundary. The right wall of the cavity was cooled at a constant temperature, and the horizontal boundaries of the region were considered adiabatic. The natural convection due to the temperature difference was considered laminar and described using the Boussinesq approximation. The mass, momentum, and energy conservation equations were formulated in variables: stream function, vorticity, and temperature; and were solved using the finite difference method. The influence of the Rayleigh number, the ratio of thermal conductivities on the heat transfer modes in the cavity were studied.*

***Keywords.** Conjugate problem, natural convection, numerical study, finite difference method*



УДК 519.6

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ  
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ  
СТЕКЛОПАКЕТОВ. Ч.1.**

А.Н. Натаров, Е.И. Гурина, П.А. Сомова

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

e-mail: [elena.gyrina@mail.tsu.ru](mailto:elena.gyrina@mail.tsu.ru)

***Аннотация.** В настоящей работе рассматривается актуальная задача моделирования тепловых потерь в стеклопакетах различной геометрической конфигурации и с различным наполнением межстекольного пространства. В качестве наполнителя в однокамерных стеклопакетах используются осушенный воздух и инертные газы.*

***Ключевые слова.** Математическое моделирование, имитационное моделирование, уравнение теплопроводности, многокамерные стеклопакеты, метод конечных разностей.*

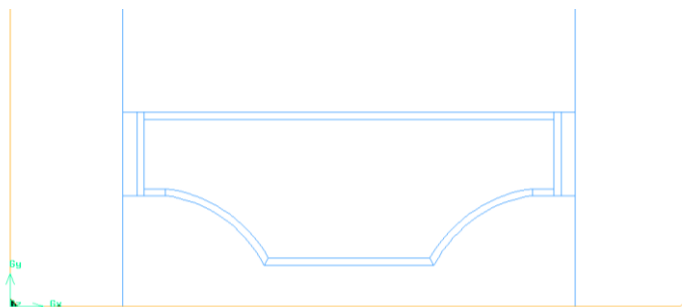
**Введение.** Основными составляющими требований экологии объектов недвижимости являются условия теплового комфорта помещений, т.к. именно через окна зданий в основном теряется тепло. При разработке геометрии современных стеклопакетов, для уменьшения тепловых потерь используются многослойные конструкции с различными теплофизическими свойствами. В случае низкой теплоизоляции стеклопакета, его свойства будут основополагающими в общих свойствах окна, даже при условии очень теплых оконных профилей. Рекомендуемая толщина стеклопакета может находиться в пределах от 16 мм до 60 мм [1,2]. Толщина камеры стеклопакета может варьироваться от 8 мм до 36 мм. В работе моделируются варианты наполнения стеклопакета осушенным воздухом и инертными газами.

**Физическая постановка задачи.** На рисунке 1 представлен стеклопакет, состоящий из двух стекол марки М1.

Такие конструкции стеклопакетов называют однокамерными [2]. С помощью двухстадийной системы герметизации стекла стеклопакета, установленные на заданном расстоянии друг от друга склеиваются вместе. Образованная между стеклами герметичная полость (камера) заполняется осушенным воздухом или инертными газами (Рис.2). В работе рассматривается процесс распространения тепла между составными частями ограждающей конструкции, обладающими различными теплофизическими характеристиками. В начальный момент времени первая (стекло), вторая (дистанционная рамка), третья (стекло) части пластины имеют температуру  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ . Толщина второго слоя  $l_2 = 0.016$  м, толщины первого и третьего слоев равны и имеют значение  $l_1 = l_3 = 0.004$  м. Температура на теплой внутренней стороне  $T_{inlet} = 25^\circ\text{C}$ . На холодной наружной стороне  $T_{outlet} = -20^\circ\text{C}$ .



*Рис. 1. Геометрия однокамерного стеклопакета*



*Рис.2. Геометрия области дистанционной рамки*

Физические свойства осушенного воздуха и инертных газов, наиболее часто используемых для заполнения межстекольного пространства, представлены в таблице 1. В случае, если межстекольное пространство заполняется более плотным газом по сравнению с воздухом (аргон, криптон, ксенон), то наблюдается значительное снижение теплопотерь за счет конвекции и теплопередачи внутри стеклопакета.

*Таблица 1*

*Физические свойства газов*

Название	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Удельная теплоёмкость $C_p$ , Дж / (кг · °К)	Коэффициент теплопроводности $\lambda_{ам}$ , Вт / (м · °К)
Осушенный воздух	1.186	1005	0.0257
Аргон	1.636	523	0.0177
Криптон	3.430	251	0.0093
Ксенон	5.380	159	0.0057

Считается, что однокамерный стеклопакет, заполненный осушенным воздухом и не имеющий стекол со

специальными покрытиями (энергосберегающее мягкое покрытие), теряет около двух третей тепла из помещения за счет излучения и одну треть – за счет теплопроводности и конвекции [3]. В стеклопакетах с толщиной дистанционной рамки от 6 до 10 мм ввиду вязкости используемого газа или смеси газов практически отсутствует конвективный поток, и тепло уходит только за счет теплопроводности. Начиная с толщины воздушной камеры в 16 мм и выше теплотери стеклопакета за счет конвекции увеличиваются. До 16 мм явление конвекции тоже присутствует, но вклад его в общие теплотери мал и перекрывается величиной теплосопrotivления осушенного воздуха или инертного газа. В настоящей работе мы концентрируем свое внимание на основном механизме переноса тепла – теплопроводности, когда при неравномерном распределении температур в рассматриваемом теле, теплота передается за счет непосредственного соприкосновения частиц, имеющих различную температуру, что и приводит к обмену энергией.

**Математическая постановка задачи.** Уравнение Фурье-Кирхгофа (1) устанавливает связь между временным и пространственным изменением температуры в каждой точке рассматриваемого тела (стеклопакет) [4,5]. Запишем уравнение конвективного теплообмена в скалярном виде:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q_w(x, y, z, t, T) \quad (1)$$

где  $w_x = \frac{\partial x}{\partial t}$ ,  $w_y = \frac{\partial y}{\partial t}$ ,  $w_z = \frac{\partial z}{\partial t}$  – проекции скоростей газа или жидкости на оси координат;  $Q_w(x, y, z, t, T)$  – мощность внутренних источников или стоков тепла, Вт/м<sup>3</sup>;  $T = f(x, y, z, t)$  – температура, °К;  $\lambda = g(x, y, z)$  – коэффициент

теплопроводности материала, Вт/(м·°С),  $\rho$  – плотность материала (кг/м<sup>3</sup>),  $C_p$  – удельная теплоемкость (Дж/кг·°С).

В рассматриваемой математической модели определения температурного поля в однокамерных стеклопакетах предполагается, что теплофизические характеристики не зависят от температуры и  $\lambda = const$ ,  $\rho = const$ ,  $C_p = const$ . Каждый слой моделируемого стеклопакета принимается однородным и рассматривается как неподвижная среда (твердое тело). В случае неподвижной среды процесс распределения температуры внутри тела описывается уравнением теплопроводности (уравнение Фурье), которое получается из (1) при  $w_x = w_y = w_z = 0$  [4]:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q_w(x, y, z, t, T) \quad (2)$$

В пространстве с декартовыми координатами дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерной нестационарной задачи без внутренних источников теплоты (также отсутствуют стоки теплоты) для каждого из слоев конструкции запишется в виде (см. Рис.3):

$$\begin{aligned} \rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, & 0 < x < L_{gl}; \\ \rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, & L_{gl} < x < L_{air}; \\ \rho_3 C_{p3} \frac{\partial T_3}{\partial t} &= \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, & L_{air} < x < L. \end{aligned} \quad (3)$$

*Начальное условие* задает распределение температуры пластины для нулевого момента времени:

$$t = 0: \quad T = T_0(t, x) = 25^\circ C, \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.1)$$

*Граничное условие I рода* рассматривается на левой границе расчетного домена (со стороны помещения):

$$x = 1: \quad T = T_{inlet}(t, x) = 25^\circ C, \quad t > 0 \quad (3.2)$$



наполнителей (см. Таблица 1), конструкция стеклопакета на его основе быстрее всего проводит тепло и имеет самый низкий коэффициент сопротивления теплопередаче. Оконные конструкции, наполненные криптоном или ксеноном, характеризуются повышенными теплосберегающими характеристиками и могут использоваться в регионах с суровыми зимами. Но ввиду их высокой стоимости заполнение криптоном или ксеноном встречается очень редко. Ниже представлены графики (Рис. 4) полученных результатов, а именно распределение температуры по толщине трехслойной пластины спустя 600, 1200, 1800, 2400, 3000, 3600, 18000, 36000 и 72000 секунд для формулы остекления стеклопакета 4M1-16-4M1.

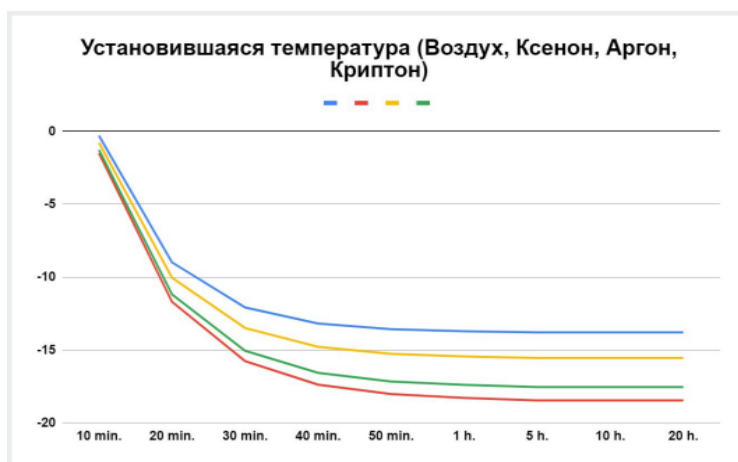


Рис.4. Визуализация распределения температуры в трехслойной пластине

Использование в стеклопакетах криптона и ксенона оказывается значительно эффективнее аргона, но ввиду их высокой стоимости и трудоемкости технологического процесса заполнения камеры - практически не используется. Самым

распространенным наполнителем стеклопакетов среди инертных газов является аргон, но несмотря на качественную герметизацию стеклянных полотен, со временем инертный газ улетучивается. Рекомендуется каждые 10 лет обновлять заполнение межстекольного пространства. Поэтому многие потребители предпочитают стеклопакеты, заполненные осушенным воздухом.

В работе также рассматриваются несколько вариантов толщины дистанционных рамок: 8 мм, 10 мм, 12 мм, 16 мм. Стеклопакеты с узкой дистанционной рамкой (8 мм и уже) неэффективны, ввиду больших потерь, связанных с прямой теплопередачей. Увеличение толщины стеклопакета до 10-16 мм приводит к увеличению сопротивления теплопередаче и улучшению теплоизоляционных свойств однокамерных стеклопакетов. При толщине спейсера (18-24 мм) стеклопакеты также считаются неэффективными, но уже ввиду больших потерь тепла за счет конвекции [3].

Для верификации полученного численного решения, а также для сопровождения результатов протекающего физического процесса наглядной визуализацией, в работе проведено имитационное моделирование с помощью универсального пакета гидродинамики Ansys Fluent.

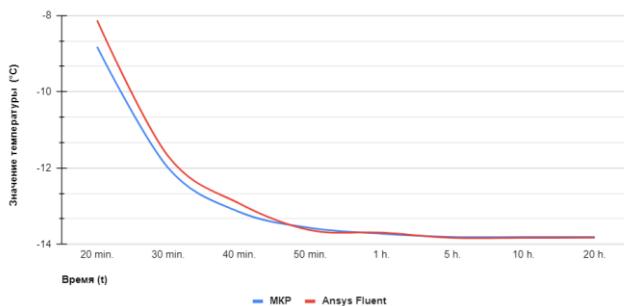


Рис. 5. Сравнение результатов расчета, полученных с использованием МКР и Ansys Fluent



На рисунке 5 представлены численные результаты расчета, полученные в программном комплексе Ansys Fluent и результаты, полученные с использованием разработанного алгоритма на C++. В таблице 2 представлена относительная погрешность результатов расчета для различных временных режимов. На основе верификации можно сделать вывод, что разработанный алгоритм решения с использованием неявной схемы позволяет получить верное решение поставленной задачи.

Таблица 2

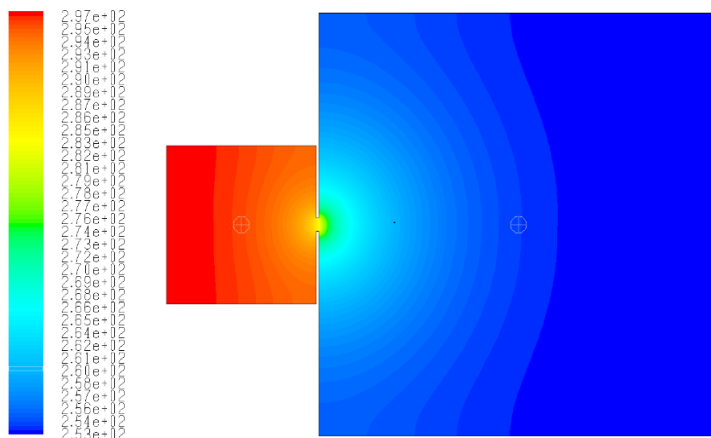
*Относительная погрешность вычисления значения температуры на выходе из расчетной области*

Время, мин.	МКР	Ansys Fluent	$\Delta$ , %
20	-8.819	-8.127	7.85%
30	-11.997	-11.689	2.57%
40	-13.15	-12.928	1.69%
50	-13.569	-13.628	0.43%
60	-13.721	-13.692	0.21%
300	-13.807	-13.829	0.16%
600	-13.807	-13.829	0.16%
1200	-13.807	-13.827	0.14%

Для оценки теплофизических свойств однокамерного стеклопакета, была использована гипотетическая модель (Рис.6) в которой стеклопакет был установлен между небольшой комнатой и доменом атмосферы. Размеры и начальная температура  $T_0$  были приняты следующими:

- теплая комната ( $T_{room} = 25^\circ\text{C}$ ) с адиабатическими стенками: 1500\*1500 мм;
- атмосферный домен ( $T_{atm} = -20^\circ\text{C}$ ): 4000\*4000 мм.

В начальный момент времени вся тепловая энергия сконцентрирована в домене теплой комнаты. Затем с течением времени тепловая энергия комнаты распределяется по домену атмосферы.



Contours of Static Temperature (k) (Time=3,9600e+04)

*Рис. 6. Распределение температуры спустя 660 минут от начала процесса*

В виду того, что на всех гранях гипотетической модели комнаты и домена атмосферы действует граничное условие:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = 0,$$

где  $\bar{n}$  – нормаль к рассматриваемой грани, то вся система очень медленно приходит к тепловому балансу. Для качественной оценки эффективности стеклопакетов, мы провели серию расчётов с использованием гипотетической модели в которой установлен однокамерный или двухкамерный стеклопакеты и сравнили значение  $T$  в комнате спустя 11 часов. Результаты будут представлены во второй части статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 24700–99. Блоки оконные деревянные со стеклопакетами. ТУ. — М.: Госстрой России; ГУП ЦПП, 2000. — 52 с.
2. ГОСТ 26602.1-99. Блоки оконные и дверные. Методики определения сопротивления теплопередаче – URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4294849/4294849979.pdf>
3. Energy Research & Social Science Volume 52, June 2019, Pages 144-158. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214629618310314>
4. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. — Томск: Изд-во ТПУ, 2007. — 172с.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений: [учебное пособие для вузов по специальности “Прикладная математика”] / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. — Москва: Наука, 1978. — 588 с.

## MATHEMATICAL MODELING OF THE INFLUENCE OF THERMOPHYSICAL PROPERTIES ON THE EFFICIENCY OF MULTIPLE-GLAZED WINDOWS. PART 1.

A.N. Natarov, E.I. Gurina, P.A. Somova

National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

e-mail: [elena.gyrina@mail.tsu.ru](mailto:elena.gyrina@mail.tsu.ru)

***Abstract.** The actual problem of modeling heat losses in double-glazed windows of various geometric configurations and with different filling of the interstitial space is considered in this paper.*

*Dried air and inert gases are used as a filler in single-chamber double-glazed windows.*

**Keywords.** *Mathematical modeling, simulation modeling, the equation of thermal conductivity, multiple-glazed windows, finite difference method.*

УДК ??? 536.24

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В  
КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ  
НАГРЕВАНИИ НИЖНЕЙ СТЕНКИ.**

Е. П. Недоедко, Н.С. Бондарева

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [nedoedko.katy@gmail.com](mailto:nedoedko.katy@gmail.com)

***Аннотация.** В данном исследовании были изучены процессы теплопереноса в замкнутой квадратной полости нестационарно нагреваемой от нижней стенки. Боковые стенки полости поддерживались при постоянной низкой температуре, верхняя стенка была теплоизолирована, на нижней стенке температура изменялась по гармоническому закону. Математическая постановка двумерной задачи ламинарной естественной конвекции была сформулирована в преобразованных переменных «функция тока – завихренность» с использованием приближения Буссинеска. Сформулированные дифференциальные уравнения в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями были решены численно методом конечных разностей второго порядка точности. Разностное уравнение для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Уравнения энергии и уравнение дисперсии завихренности для расплава решались с использованием локально-одномерной схемы А.А. Самарского.*

***Ключевые слова.** Теплоперенос, естественная конвекция, метод конечных разностей, численное исследование.*

**Введение.** На данный момент существует большое количество численных и экспериментальных исследований естественной конвекции, это обусловлено тем, что данная тема применима ко многим технологическим процессам и

неразрывно связана с тепловыми процессами в энергетике, строительной сфере и промышленности [1–3]. Естественная конвекция возникает в результате разницы плотностей в среде, которая при нагревании становится менее плотной и поднимается вверх, а холодные потоки опускаются, создавая циркуляцию жидкости или газа в области.

Естественная конвекция играет важную роль в обеспечении естественной вентиляции в закрытых помещениях, формируя микроклимат в зданиях, когда нет возможности установить систему искусственной вентиляции. В этом случае управляющими факторами будут следующие особенности: наличие тепловыделяющих элементов, притоков воздуха и вентиляторов, которые могут быть расположены на стенах или на окнах. Оптимальное сочетание всех этих факторов позволяет обеспечить эффективный поток воздуха и оптимальный тепловой режим. Управление тепловыми процессами и контроль температурных режимов требует подробного изучения режимов переноса тепла и массы в каждом отдельном случае.

Данная работа посвящена численному исследованию процессов конвективного теплопереноса в замкнутой области при нестационарном нагревании от нижней стенки. Математическая постановка задачи была сформулирована в преобразованных переменных «функция тока – завихренность». Решение было получено на основе метода конечных разностей. На основе расчетных данных было проанализировано влияние числа Рэлея, а также амплитуды и частоты изменения температуры нижней стенки.

**Математическая постановка.** В качестве расчетной области рассматривалась замкнутая квадратная полость размерами  $L \times L$  (рисунок 1). Температура нижней стенки менялась по гармоническому закону  $T = T_0(1 + a \sin(\omega t))$ . Область охлаждалась от боковых стенок, поддерживаемых при постоянной температуре  $T_c$ , верхняя граница считалась теплоизолированной. Считалось, что течение развивающееся в

полости ламинарно и разность плотностей, обусловленная градиентом температур, описывалась приближением Буссинеска.

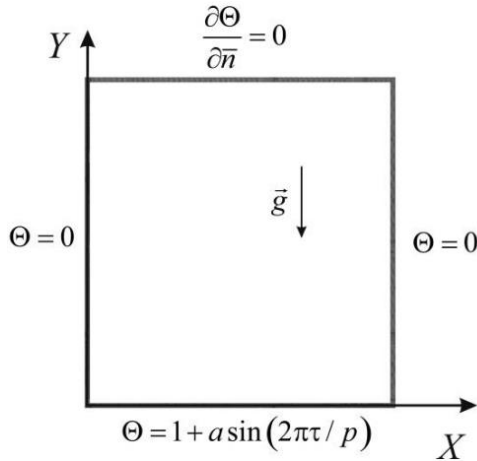


Рис. 1. Область решения

Дифференциальные уравнения, описывающие процесс ламинарной естественной конвекции в размерных переменных «скорость – давление», имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_c) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda_f}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Для исключения поля давления вводятся преобразованные переменные функция тока и завихренность,

определяемые соотношениями:  $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,  $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ,  $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ .

Тогда математическая модель на основе безразмерных переменных «функция тока – завихренность – температура» с учетом приближения Буссинеска примет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \sqrt{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (8)$$

Здесь  $X$ ,  $Y$  – безразмерные координаты декартовой системы;  $\tau$  – безразмерное время;  $\Psi$  – безразмерная функция тока;  $\Omega$  – безразмерная завихренность;  $\Theta = (T - T_C) / (T_H - T_C)$  – безразмерная температура;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\beta$  – термический коэффициент объемного расширения; и безразмерные комплексы, определяющие режимы тепломассопереноса:

$\text{Ra} = g \beta V T^3 / \nu a$  – число Рэлея и  $\text{Pr} = \frac{\nu}{a}$  – число Прандтля;

Безразмерные граничные условия для системы уравнений имеют вид:

$$Y = 0, 0 \leq X \leq 1, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Psi = 0, \Theta = 1 + a \cdot \sin\left(\frac{2\pi X}{p}\right);$$

$$Y = 1, 0 \leq X \leq 1, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Psi = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$X = 0, X = 1, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0.$$



**Численный алгоритм.** Решение сформулированной задачи с соответствующими граничными условиями проведено методом конечных разностей второго порядка точности [4,5]. Дискретное уравнение Пуассона для функций тока было решено методом последовательной верхней релаксации. Уравнения энергии и уравнение дисперсии завихренности для расплава решались с использованием локально-одномерной схемы А.А. Самарского. Сформулированная математическая модель и разработанный вычислительный аппарат были проверены на модельной задаче естественной конвекции с нагреваемой вертикальной стенкой в квадратной полости, на поверхности которой поддерживалась температура, периодически изменяющаяся во времени [1]. Для сравнения был взят случай с безразмерными комплексами:  $Ra = 1.4 \cdot 10^5$ ,  $Pr = 7$ , период и амплитуда колебаний температуры определялись значениями:  $p = 0.01$  и  $a = 0.4$ , соответственно. Анализ полученных изотерм показал хорошее согласование с численным экспериментом [1].

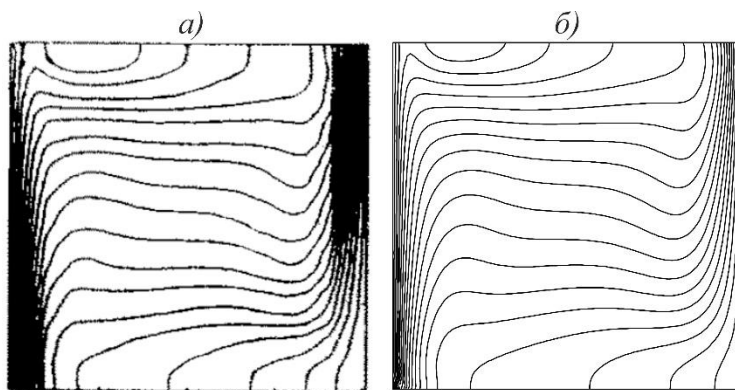
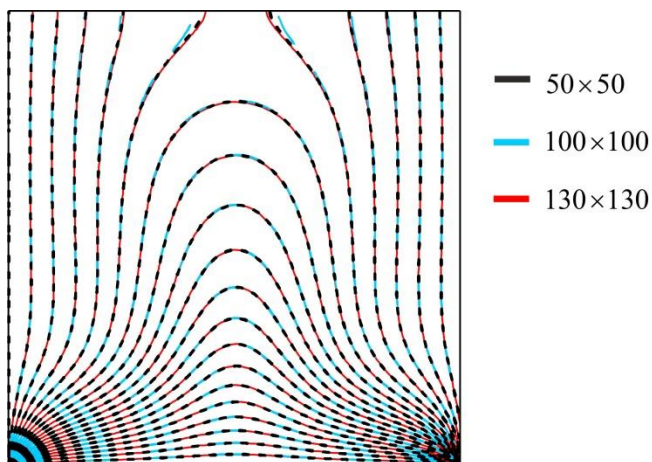


Рисунок 2. Сравнение изотерм для  $Ra = 1.4 \cdot 10^5$ ,  $Pr = 7$ :  
а) Изотермы полученные в [1]; б) Полученные результаты

Анализ на сеточную сходимость был проведен для случая нижнего нагрева при  $Ra = 10^4$  и  $Pr = 0.7$  на сетках:

$50 \times 50$ ;  $100 \times 100$ ;  $130 \times 130$ . Полученные графики показывают возможность использования равномерной сетки размерности  $100 \times 100$  для проведения дальнейших численных исследований.



*Рис. 3. Изотермы для случая  $Ra = 10^4$ ,  $Pr = 0.7$ , полученные на разных сетках*

**Анализ полученных результатов.** В рамках рассматриваемой задачи естественной конвекции в квадратной полости с нагреваемой, по гармоническому закону, нижней стенкой проведены исследования влияния числа Рэлея, амплитуды и периода на режимы теплопереноса. Число Прандля в вычислениях рассматривалось равным  $Pr = 0.7$ , что соответствует теплофизическим свойствам воздуха.

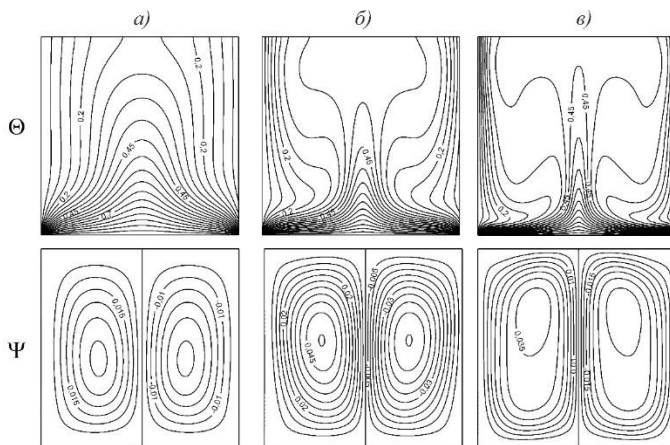


Рис. 4. Линии тока ( $\Psi$ ) и распределения температуры ( $\Theta$ ) при разных Рэлеях а)  $Ra = 10^4$ , б)  $Ra = 10^5$ , в)  $Ra = 10^6$

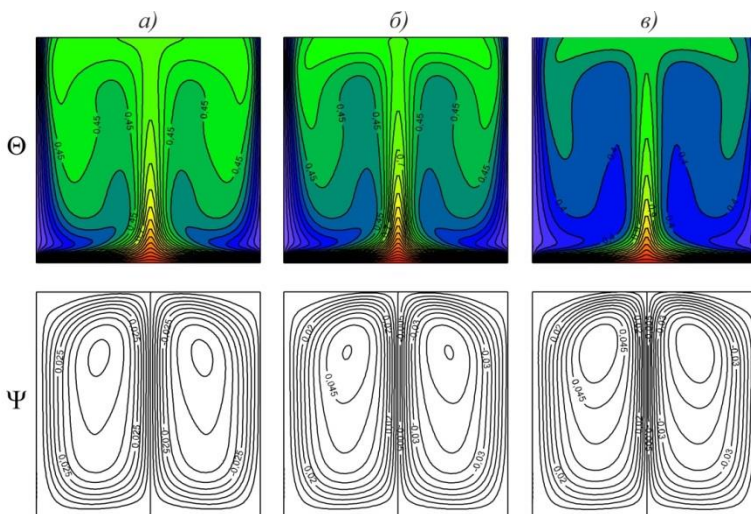


Рис. 5. Линии тока ( $\Psi$ ) и распределения температуры ( $\Theta$ ) при разных амплитудах в момент времени  $\tau = 112.5$  для  $Ra = 10^6$  и  $p = 50$ : а)  $a = 0.2$ , б)  $a = 0.4$ , в)  $a = 0.8$

На рисунке 4 представлены распределения функций тока и температуры в момент времени  $\tau = 50$  при значениях периода и амплитуды  $p = 5$  и  $a = 0.4$ , соответственно, для чисел Рэлея  $Ra = 10^4$ ,  $Ra = 10^5$  и  $Ra = 10^6$ . Видно, что с увеличением числа Рэлея, происходит более интенсивный прогрев верхней части полости. Линии тока отображают наличие двух симметричных относительно центральной оси конвективных ячеек. При увеличении  $Ra$  ядра конвективных вихрей смещаются от середины высоты полости вверх, при этом температурный факел значительно вытягивается, перенос тепла осуществляется преимущественно за счет естественного конвективного теплообмена. На холодных стенках интенсивный теплообмен отражается в сгущении изотерм.

На рисунках 5 и 6 представлены поля температуры и линии тока для случаев  $Ra = 10^6$  и  $p = 50$  при различных амплитудах колебаний температуры нижней стенки в моменты, соответствующие максимальным и минимальным температурам. При максимальных значениях температуры на нижней стенке наблюдаются похожие картины течений. В областях наблюдается развитая термогравитационная конвекция, скорости течения в среде увеличиваются с ростом амплитуды, температурный факел сужается и вытягивается вверх (рисунок 5в). После снижения температуры верхняя часть полости некоторое время остается более прогретой, поэтому при больших амплитудах температура в верхней части полости достаточно высокая и может быть выше, чем на поверхности нижней стенки (рисунок 6в).

В таких случаях наблюдается небольшое изменение гидродинамической картины, так в случаях  $a = 0.4$  и  $a = 0.8$  ядра конвективных ячеек смещаются к нижней стенке, а в случае  $a = 0.8$  возникает рециркуляционная зона в верхней части из-за прогрева верхней части области. При максимальных температурах изменение функций тока не значительно, и конвективные вихри отличаются незначительно. Однако, при

минимальных температурах с увеличением амплитуды увеличивается и интенсивность циркуляции среды.

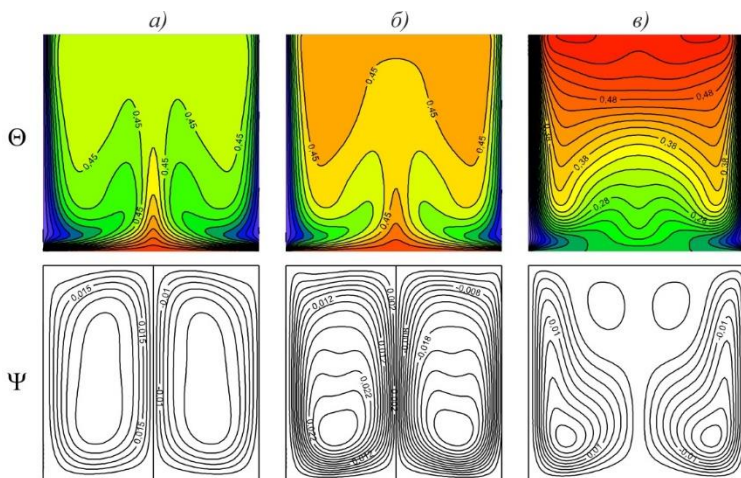


Рис. 6. Линии тока ( $\Psi$ ) и распределения температуры ( $\Theta$ ) при разных амплитудах в момент времени  $\tau = 137.5$  для  $Ra = 10^6$  и  $p = 50$ : а)  $a = 0.2$ , б)  $a = 0.4$ , в)  $a = 0.8$

На рис. 7 представлено изменение числа Нуссельта при безразмерных периодах изменения температуры  $p = 10$ ,  $p = 50$  и  $p = 100$  и числах Рэлея  $Ra = 10^4$  и  $Ra = 10^6$  в случае амплитуды  $a = 0.4$ . Увеличение периода колебаний отражается на изменении числа Нуссельта. Минимальные значения числа Нуссельта будут совпадать с минимальными значениями температуры и наоборот: при максимальных значениях температуры число Нуссельта будет максимальным. При больших числах Рэлея в начальные моменты времени происходили резкие изменения числа Нуссельта, что можно объяснить установлением интенсивной циркуляции в среде. Следует также отметить, что уменьшение  $p$  приводит к

увеличению амплитуды колебаний интегрального числа Нуссельта при одних и тех же числах Рэлея.

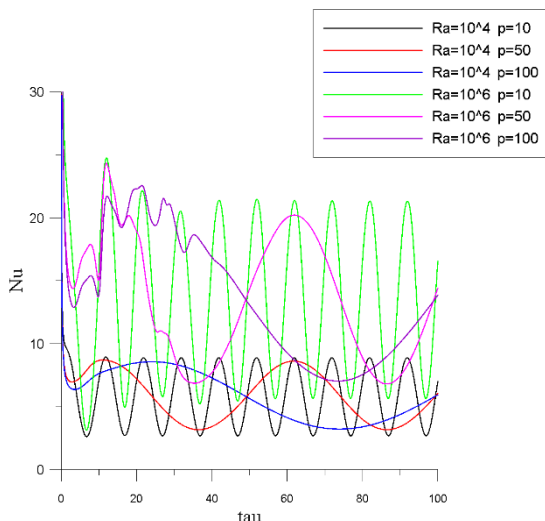


Рис.7 Влияние периода  $p$  при числах Рэлея  $Ra = 10^4$  и  $Ra = 10^6$  и амплитуде  $a = 0.4$ .

**Закключение.** В ходе данной работы была разработана вычислительная модель для исследования процессов тепломассопереноса в квадратной полости. Проанализировано влияние таких параметров, как число Рэлея, амплитуда и период колебаний температуры нижней стенки, на процессы тепломассопереноса в замкнутой квадратной полости. Было показано, что с увеличением числа Рэлея возрастает интенсивность конвективного тепломассопереноса, полость в верхней части прогревается интенсивнее. С увеличением амплитуды при пиковых температурах также наблюдалось усиление конвективного переноса, при этом снижение температуры приводило к временному перестраиванию картины

течения из-за сильного прогрева полости. При увеличении периода максимальные значения числа Нуссельта снижаются.

Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского научного фонда (22–79–10341).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Kazmierzak and Z. Chinoda. Buoyancy-driven flow in an enclosure with time periodic boundary conditions – Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 35, No. 6, pp. 1507-1518, 1992
2. Wan D.C., Patnaik B.S.V., Wei G.W. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution // Numerical Heat Transfer. Part B. – 2001. – Vol. 40. – Pp. 199–228.
3. J. M. Hyun and J. W. Lee, Numerical solutions for transient natural convection in a square cavity with different sidewall temperatures, Int. J. Heat *Fluid Flow* 10, 146-151 (1989).
4. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача / А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – С. 344.
5. Шеремет М.А. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения / М.А. Шеремет. — Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 176 с.

## NUMERICAL STUDY OF HEAT AND MASS TRANSFER IN A SQUARE CAVITY UNDER A CYCLIC HEAT LOADS

E.P. Nedoyedko, N.S. Bondareva

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [nedoedko.katy@gmail.com](mailto:nedoedko.katy@gmail.com)

**Abstract.** *In this study, the processes of heat and mass transfer in a closed square cavity heated from the bottom wall were studied. The side walls of the cavity were maintained at a constant low*

*temperature, the upper wall was thermally insulated, and the temperature on the lower wall varied according to a harmonic law. The mathematical statement of the two-dimensional problem of laminar natural convection was formulated in the transformed variables «stream function – vorticity» using the Boussinesq approximation. The formulated partial differential equations with the corresponding initial and boundary conditions were solved numerically by the finite difference method of the second order of accuracy. The difference equation for the stream function was solved by the successive upper relaxation method. The energy equations and the vorticity dispersion equation for the melt were solved using the local one-dimensional scheme of A.A. Samarskii.*

**Keywords.** *Heat and mass transfer, natural convection, finite difference method, numerical study.*



УДК 536.2

**ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ  
ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Сержантов А.В.<sup>1</sup>, Лещинский Д.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, Томск

<sup>2</sup> Национальный исследовательский Томский государственный  
университет, Томск

E-mail: [serzhantovartemy@yandex.ru](mailto:serzhantovartemy@yandex.ru)

***Аннотация.** Работа посвящена созданию параллельного алгоритма для численного решения двумерного дифференциального уравнения теплопроводности в прямоугольной области с граничными условиями третьего рода и симметрии. Распараллеливание выполнено с использованием одномерной декомпозиции области исследования. Полученная программная реализация адаптирована для применения на многопроцессорной вычислительной технике с распределенной памятью.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, уравнение теплопроводности.*

**Введение.** В наши дни применение суперкомпьютеров, кластеров и других высокопроизводительных вычислительных систем является одним из приоритетных направлений в вычислительной технике. Современные научные исследования и промышленные разработки требуют очень сложных и трудоемких вычислений, которые зачастую могут быть выполнены лишь на высокопроизводительных, многоядерных ЭВМ. Одной из важных задач нынешнего времени является задача теплообмена тел. Задача имеет огромное влияние на различные сферы человеческой деятельности: энергетику, машиностроение, ракетостроение, кораблестроение, теплофизику и другие. К сожалению, большинство таких задач могут быть решены только с помощью численных методов. В

процессе решения этих задач появляются проблемы, связанные с объемом обрабатываемых данных, что влечет за собой значительное увеличение времени для получения решения. Использование многопроцессорных ЭВМ дает возможность сократить время обработки огромных массивов информации по сравнению с последовательными вычислительными системами [1, 2].

В данной работе будет проведен расчет распределения температуры внутри исследуемого тела (кирпичной стены), происходящего в результате теплообмена с окружающим его воздухом, посредством численного решения двумерного уравнения теплопроводности с использованием многопроцессорной вычислительной техники, а именно с помощью кластера ТГУ – Skif-Cyberia. После исследования будет проведен анализ ускорения и эффективности работы параллельной программы.

**Физико-математическая постановка задачи.**

Моделируется процесс распространения тепла при взаимодействии кирпичной стены со средами, имеющими температуру  $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$  и  $+25\text{ }^{\circ}\text{C}$  (Рис. 1). Размеры стены  $0,24 \times 0,24\text{ м}^2$ . С течением времени происходит свободный теплообмен. Стена имеет начальную температуру  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

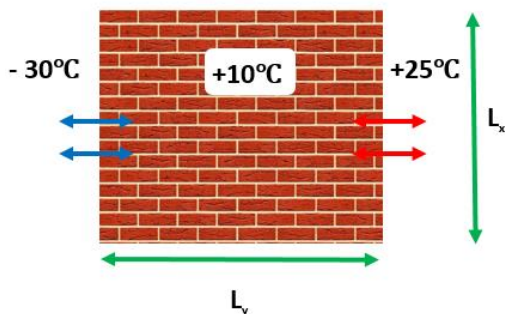


Рисунок 1 – Иллюстрация физической постановки задачи.

Приведенный процесс теплообмена между двумя средами и кирпичной стеной описывается уравнением теплопроводности с граничными условиями третьего рода, условием симметрии и заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \\ T(0, x, y) = 10^\circ\text{C}; \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = a_{air}(T - T_{air_1}); \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = a_{air}(T - T_{air_2}); \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0. \end{cases}$$

Нужно определить, как с течением времени будет изменяться температура стены  $T(t, x, y)$  в различных точках области исследования.

**Аппроксимация.** Будем искать численное решение задачи, применяя метод конечных разностей [4, 5]. Подставив конечно-разностные формулы для дифференциальных операторов в исходное уравнение, получим явную разностную схему для дифференциального уравнения теплопроводности:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + a\tau \left( \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right),$$

где  $h_x = L_x / (N_x + 1)$ ;  $h_y = L_y / (N_y + 1)$  – шаги координатной сетки,  $L_x$  и  $L_y$  – размеры стены,  $N_x$  и  $N_y$  – количество узлов внутри сетки по координатам  $x$  и  $y$ , соответственно;  $\tau$  – шаг временной сетки.

Из этого уравнения понятно, что значения в точке на данном временном слое в этой же точке зависят от значений, граничащих с ней на предыдущем слое по времени. То есть, разностная схема описывается крестовым шаблоном (Рис. 2).

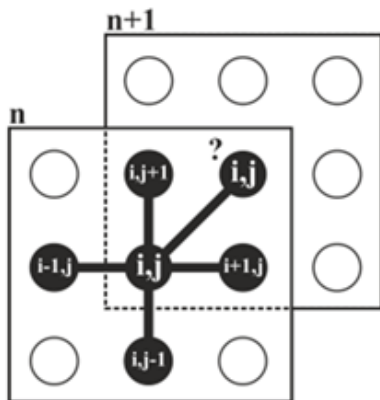


Рисунок 2 – Шаблон явной разностной схемы.

Найденная явная разностная схема аппроксимирует во внутренних точках исходное уравнение теплопроводности первым порядком по времени и вторым по координатам  $O(\tau, h_x^2, h_y^2)$ . На границах стены – первые порядки точности по координатам  $O(h_x)$  и  $O(h_y)$ . Также эта разностная схема является устойчивой со следующим условием:

$$\tau \leq \frac{h_x^2 h_y^2}{2\alpha(h_x^2 + h_y^2)}.$$

**Программная реализация.** Разработку программы для решения поставленной задачи будем осуществлять на языке программирования высокого уровня C++ с применением библиотеки MPI, чтобы распараллелить программу.

MPI (Message Passing Interface) – это программный интерфейс для передачи информации, он позволяет обмениваться сообщениями между процессами, выполняющими одну задачу. MPI - наиболее распространенный стандарт среди интерфейсов обмена данными в параллельном программировании. Основным средством контактирования процессов в MPI является передача сообщений. В первую очередь MPI ориентирован на системы с распределенной памятью, например, вычислительный кластер ТГУ.

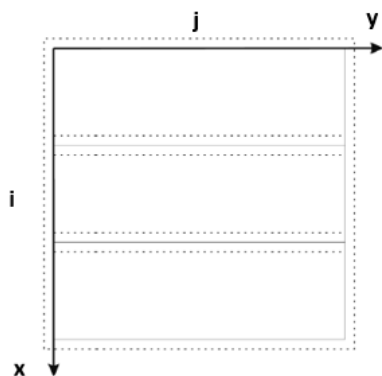


Рисунок 3 – Декомпозиция двумерной области.

Будет использоваться распараллеливание по данным в виде одномерной декомпозиции. Декомпозиция заключается в том, что производится разделение области данных на некоторые части, и на каждой подобласти вычисления происходят одновременно (Рис. 3).

Двумерные массивы данных в языке C++ хранятся в памяти компьютера построчно, значит, декомпозицию расчетной области будем проводить тоже по строкам, то есть по индексу  $i$  (Рис. 3). Каждый процесс будет иметь свои  $m$  строк, где  $m = N_x/p$ ,  $p$  – число процессоров, которые используются в вычислениях.

При использовании шаблона явной разностной схемы при вычислениях в приграничных узлах сетки на каждом процессоре будет необходимость в использовании данных с соседнего процессора, как показано на рисунке 4а. Поэтому, необходимо создать в массиве строки с фиктивными ячейками на каждом процессоре для обмена данными. Приграничные значения с соседних процессов будут пересылаться в фиктивные ячейки (Рис. 4б).

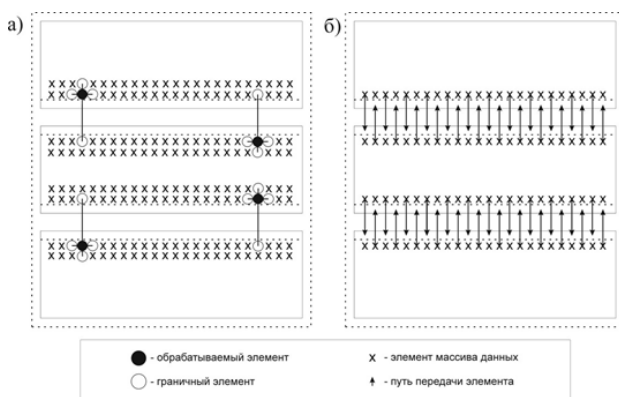


Рисунок 4 – Использование фиктивных ячеек и пересылки данных.

Для осуществления обмена данными между процессорами используются функции двухточечного обмена из библиотеки MPI: MPI\_Send и MPI\_Recv (отправить и принять сообщение соответственно).

**Численные эксперименты и результаты.** Численное моделирование проводилось при следующих константах: температуропроводность кирпича  $a_{br} = 2,94 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , теплопроводность кирпича  $\lambda_{br} = 0,5 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{°C})$ , плотность кирпича  $\rho = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3$ , удельная теплоемкость кирпича  $C = 850 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{°C})$ , коэффициент теплообмена воздух-кирпич  $a_{air} = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ .

Использовавшийся шаг по времени, удовлетворяющий условию устойчивости:  $\tau = 0.15$  с. Сетка была задана 512\*512 узлов. Проведены вычисления на 1, 2, 4, 8 и 16 процессорах. Реализация проводилась на кластере ТГУ со следующими характеристиками: два процессора Intel(R) Xeon(R) Silver 4214 CPU @ 2.20GHz, с 192 Гб оперативной памяти.

По полученным данным построены контуры температур: для следующих моментов времени: 25 мин (Рис. 5а), 4 ч 10 мин (Рис. 5б), 41 ч 10 мин (Рис. 5в).

Счетчик времени, добавленный в программу, фиксировал время выполнения программы. Ниже, приведена таблица времени выполнения программы, ускорения и эффективности на различном количестве процессоров (Таблица 1). На рисунке 6 приведен график зависимости ускорения от количества процессоров.

*Таблица 1*

*Результаты параллелизации алгоритма.*

10 000 шагов по времени					
Количество процессоров	1	2	4	8	16
Время, с	51,51	30,11	15,77	13,99	9,91
Эффективность	1	0,85	0,81	0,46	0,32
Ускорение	1	1,71	3,26	3,68	5,19
100 000 шагов по времени					
Количество процессоров	1	2	4	8	16
Время, с	566,61	317,34	163,45	139,47	104,67
Эффективность	1	0,89	0,86	0,508	0,33
Ускорение	1	1,78	3,46	4,062	5,41

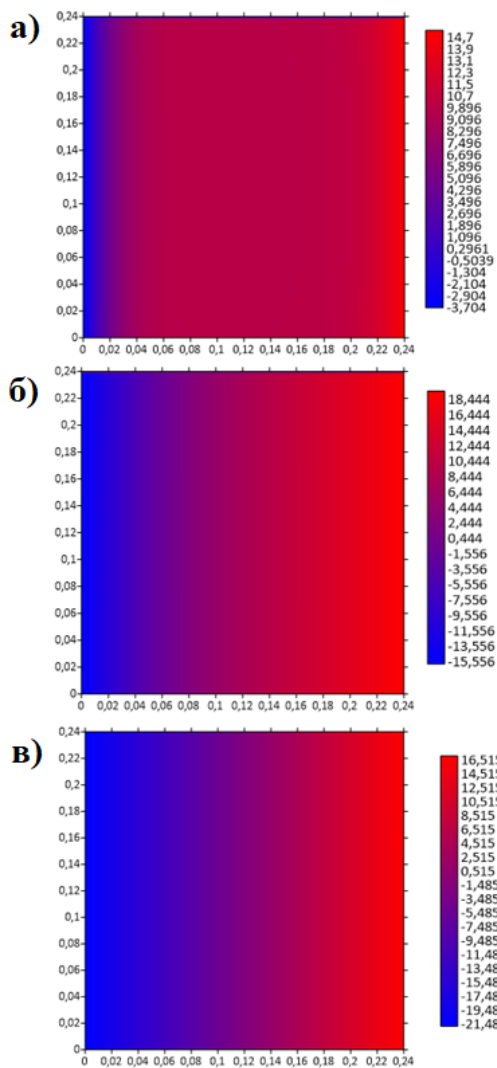
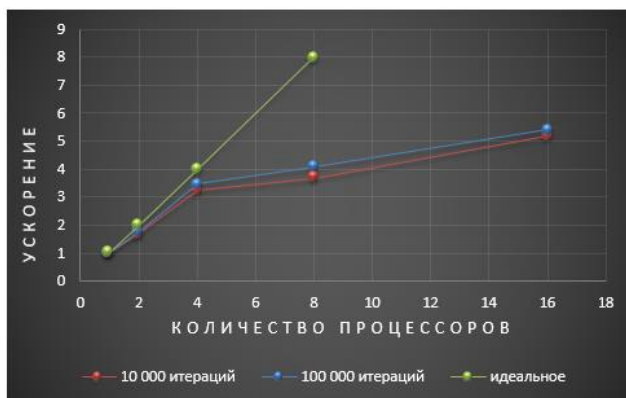


Рисунок 5 – Контуры температур в различные моменты времени (а – 25 мин, б – 4 ч 10 мин, в – 41 ч 10 мин).





*Рисунок 6 – График зависимости ускорения от количества используемых процессоров.*

Из графика явно видно, что с ростом количества процессоров затрачиваемое время на выполнение программы уменьшается, но если процессоров больше 4, то ускорение растет уже не так быстро. Это происходит, т.к. время на выполнение вычислительных операций уменьшается с ростом числа используемых процессоров, но вместе с этим увеличивается и время на пересылку данных между процессорами. В какой-то момент при увеличении числа процессоров пересылка данных между процессорами станет слишком долгой, поэтому невыгодно и бессмысленно использовать слишком много процессоров.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИОА СО РАН

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилкин Е. А. Распараллеливание явных и неявных разностных схем, эффективность параллельных и последовательных программ / Е. А. Данилкин. – Томск:

- Изд-во Том. ун-та, 2014. – 41 с.
2. Старченко А. В. Методы параллельных вычислений / А. В. Старченко, В. Н. Берцун. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – 225 с.
  3. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Изд-во М., 1977. – 656с.
  4. Кузнецов Г. В. Разностные методы задач теплопроводности / Г. В. Кузнецов, М. А. Шеремет. – Изд-во Том. политех. ун-та, 2007. – 172 с.
  5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. / С. Патанкар. – М: Энергоатомиздат, 1984. – 152

## APPLICATION OF PARALLEL TECHNOLOGIES IN THE NUMERICAL SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTIVITY EQUATION

A.V. Serzhantov<sup>2</sup>, D.V. Leshchinskiy<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

<sup>2</sup>V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Russia, Tomsk, Zuev square, 1, 634055

E-mail: [serzhantovartemy@yandex.ru](mailto:serzhantovartemy@yandex.ru)

**Abstract.** *The work is devoted to the creation of a parallel algorithm for the numerical solution of a two-dimensional differential heat equation in a rectangular domain with boundary conditions of the third kind and symmetry. Parallelization is performed using a one-dimensional decomposition of the study area. The resulting software implementation is adapted for use on multiprocessor computers with distributed memory.*

**Keywords.** *Mathematical modeling, numerical methods, heat equation.*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА  
ПОЛИМЕРНО-БИТУМНОГО ВЯЖУЩЕГО,  
ОПИСЫВАЕМОГО МОДЕЛЬЮ КРОССА, В КАНАЛЕ С  
ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ**

Н.С. Фирсанова<sup>1</sup>, О. В. Матвиенко<sup>1,2</sup>, И.С.Черкасов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Томский государственный университет, Россия, 634050, г.

Томск пр. Ленина, 36.

<sup>2</sup> Томский государственный архитектурно-строительный  
университет Россия 634003 г. Томск, пл. Соляная, 2.

E-mail: matvolegv@mail.ru, firnataliya@yandex.ru,  
ilyacherkas@mail.ru

***Аннотация.** Проведено исследование закрученного течения полимерно-битумного, вяжущего в канале с внезапным расширением. Поступающий из подводящего патрубка поток испытывает расширение, связанное с резким увеличением площади поперечного сечения. В пространстве, ограниченном внешней границей потока и стенками канала, локализуется угловая рециркуляционная зона. Центробежные силы, возникающие в закрученном потоке, интенсифицируют радиальное движение от оси к цилиндрическим стенкам. В результате размеры угловой рециркуляционной зоны и интенсивность рециркуляции в ней уменьшается. При сильной закрутке потока происходит формирование приосевой области возвратных течений. Формирование угловой зоны возвратных течений сопровождается ростом в ней значений эффективной вязкости. С закруткой потока на участке нестабилизированного течения происходит уменьшение значений эффективной вязкости.*

***Ключевые слова.** реология, битумные вяжущие, вязкость, неньютоновские жидкости, модель Кросса, закрученное течение.*

**Введение.** Потребность в производстве полимерно-битумных вяжущих (ПБВ) связана с увеличением интенсивности движения и ростом нагрузок на дорожное покрытие, а также специфическими условиями эксплуатации объектов дорожного строительства в различных климатических условиях. Модифицирование дорожных битумов полимерами является одним из способов повышения их эксплуатационных свойств [1]. Многочисленные исследования показывают преимущество битумных вяжущих с добавлением стирол-бутадиен-стирольных полимеров (СБС-полимеров) над обычными нефтяными битумами [2]. Цикл теоретических исследований процессов течения и модифицирования битумных вяжущих в технологических устройствах проведен в работах [3–9].

Важнейшим элементом системы перекачки битумных вяжущих в процессе их модификации является трубопровод, который включает в себя различные функциональные элементы: краны, затворы, клапаны, штуцеры, крестовины, переходники. Наличие перечисленных деталей часто приводит к формированию скачка сечения – участка резкого изменения площади проходного сечения в меньшую (сужение) или в большую (расширение) сторону. Использование конструктивных элементов различного назначения, в том числе сужения и расширения, приводит к дополнительным потерям энергии за счет вынужденной перестройки потока при развитии соответствующей картины течения. Для организации требуемого режима и создания условий течения с целью обеспечения эффективной транспортировки среды необходимы данные о влиянии геометрических особенностей трубопровода на формирование структуры потока, кинематические и динамические характеристики течения.

Вязкость битумных вяжущих зависит от коллоидной структуры, степени дисперсности, температуры, параметров течения и может сильно изменяться в технологическом

процессе. Подробный обзор исследований, посвященных течениям реологические сложных сред, приведен в монографиях [10–13].

Результаты исследований, представленные в работах [14, 15] показывают, что зависимость эффективной вязкости от сдвигового напряжения имеет три характерных режима. Эффективная вязкость в области низких скоростей деформации постоянна и представляет собой наибольшую вязкость вяжущего при «нулевой» скорости сдвига  $\mu_0$ . Этот режим течения отвечает неразрушенной структуре полимерно-битумного вяжущего. Это означает, что деформирование осуществляется с таким малым напряжением, что интенсивность процессов разрушения и восстановления структуры одинаковы. Переходному режиму течения отвечают промежуточные скорости сдвига. Для этого режима течения характерно уменьшение эффективная вязкость вяжущего с возрастанием скорости сдвига. С точки зрения реологии наличие этого режима объясняется тем, что скорость разрушения пространственной структуры превышает скорость её восстановления. Третий режим течения соответствует предельно разрушенной структуре, когда процессы разрушения молекулярных связей в ПБВ гораздо интенсивнее, чем процессы восстановления. Вязкость, которая отвечает этому участку, называется вязкостью предельно разрушенной структуры (вязкостью при «бесконечной» скорости сдвига)  $\mu_\infty$ .

**Описание математической модели.** При аппроксимации экспериментальных исследований течения ПБВ в качестве одной из наиболее универсальных моделей можно использовать реологическую модель Кросса [2]:

$$\frac{\mu_0 - \mu_{\text{eff}}}{\mu_{\text{eff}} - \mu_\infty} = \left( \frac{U}{U_*} \right)^n,$$

где  $n$  – показатель нелинейности,  $U_*$  – скорость сдвига, при которой происходит резкое изменение вязкости.

Настоящая работа является продолжением исследований течения битумных вяжущих [16-27]. Целью настоящей работы является исследование структуры закрученного течения полимерно-битумного вяжущего, описываемого моделью Кросса, в цилиндрическом канале с внезапным расширением. При математическом моделировании предполагается, что ПБВ подается из подводящего патрубка радиусом  $r_{in}$  в трубы радиусом  $R$  и длиной  $L$ .

Для описания поля течения применяется двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v w r}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tau_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{\rho v w}{r}. \quad (4)$$

Для полимерно-битумного вяжущего, описываемого моделью Кросса, реологические соотношения в случае осесимметричного течения имеют вид [2]:

$$\tau_{xx} = 2 \frac{\mu_0 U_*^n + \mu_\infty U^n}{U_*^n + U^n} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xr} = \frac{\mu_0 U_*^n + \mu_\infty U^n}{U_*^n + U^n} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{rr} = \frac{\mu_0 U_*^n + \mu_\infty U^n}{U_*^n + U^n} \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = 2 \frac{\mu_0 U_*^n + \mu_\infty U^n}{U_*^n + U^n} \frac{v}{r},$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{\mu_0 U_*^n + \mu_\infty U^n}{U_*^n + U^n} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{\mu_0 U_*^n + \mu_\infty U^n}{U_*^n + U^n} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) \right),$$

$$U = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2.$$

На границах расчетной области задавались следующие условия:

$$x = 0, \quad r \leq r_{\text{in}}: \quad u = u_{\text{in}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad v = 0; \quad w = \text{Ro} \cdot u_{\text{in}} \left( \frac{r}{R} \right);$$

$$x = L: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$r = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0; \quad w = 0;$$

$$x > 0, \quad r = R: \quad u = 0, \quad v = 0; \quad w = 0;$$

$$x = 0, \quad r_{\text{in}} < r < R: \quad u = 0, \quad v = 0. \quad w = 0.$$

Параметр Россби  $\text{Ro}$  характеризует величину угловой скорости потока  $\omega = \text{Ro} \cdot u_{\text{in}} / R$ . Величина  $u_{\text{in}}$  определяет скорость на оси течения на входе в канал. Для параболического распределения осевой скорости эта величина связана с объёмным расходом жидкости  $Q$  соотношением:

$$u_{\text{in}} = 2 \frac{Q}{\pi r_{\text{in}}^2}.$$

Уравнения (1 – 4) решались численно с применением метода конечного объема [28, 29].

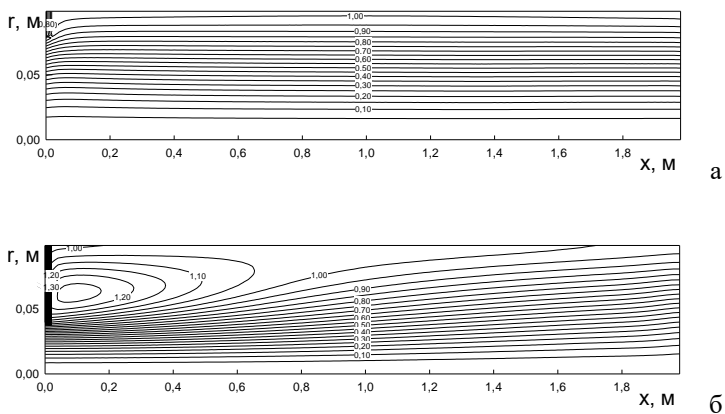
Перейдем к анализу полученных результатов. Диапазон изменения параметров был выбран следующим: вязкость вязущего при «нулевой» скорости сдвига  $\mu_0 = 105.6$  Па·с, вязкость при «бесконечной» скорости сдвига  $\mu_\infty = 14.7$  Па·с, показатель нелинейности –  $n = 0.312$ , характерная скорость сдвиговых деформаций  $U_* = 1.59 \text{ с}^{-1}$ . Выбранный диапазон изменения параметров соответствует свойствам полимерно-битумных вязущих, модифицированных СБС полимером. Объёмный расход жидкости составлял  $Q = 0.03 \text{ м}^3/\text{с}$ . Радиус

канала составлял  $R = 0.1$  м, радиус подводящего патрубка варьировался в диапазоне  $R = 0.02 \div 0.08$  м.

**Полученные результаты.** Рассмотрим сначала влияние скачка сечения на структуру течения незакрученного потока полимерно-битумного вязущего. С этой целью было проведено исследование влияние степени расширения канала  $\eta = (R - r_{in})/R$  на параметры течения. При малых значениях параметра  $\eta < 0.25$  влияние скачка сечения на структуру течения незначительно. В этом случае наблюдается незначительное расширение струи, втекающей в трубу из подводящего патрубка и формирование застойной зоны в окрестности торцевой стенки. С ростом значений  $\eta$  картина течения существенно изменяется. Поступающая в трубу из подводящего патрубка струя полимерно-битумного вязущего испытывает расширение, связанное с резким увеличением площади поперечного сечения. В результате этого радиус струи вниз по потоку увеличивается. На начальном участке течения в окрестности оси заметно выделяется потенциальное ядро. В периферийной области течения значения осевой скорости становятся отрицательными. Это свидетельствует о формировании угловой рециркуляционной зоны, связанной с резким расширением сечения.

Линии тока для различных значений параметра  $\eta$  приведены на рис. 1.





*Рис. 1. Линии тока в трубе со скачком сечения: а –  $\eta=0.2$ , б –  $\eta=0.6$ .*

Отчетливо видно наличие зоны возвратных течений в области примыкающей к входному сечению в пространстве ограниченном внешней границей струи торцевой и цилиндрической стенками. Как видно из рис. 1 с увеличением степени расширения канала (ростом  $\eta$ ) происходит усиление рециркуляции в угловой зоне возвратных течений, а также увеличение размеров этой зоны.

На рис. 2 показано распределение эффективной вязкости потока в трубе со скачком сечения.

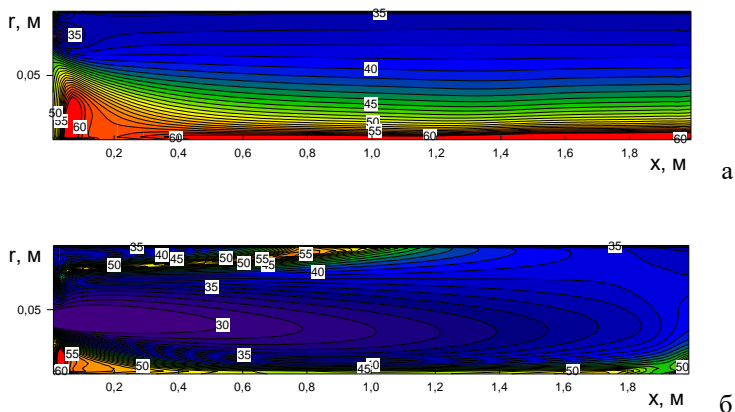


Рис. 2. Изолинии эффективной вязкости в трубе со скачком сечения: а –  $\eta=0.2$ , б –  $\eta=0.6$ .

В результате разрушения структурных связей при больших значениях  $\eta$  происходит уменьшение значений эффективной вязкости в потоке. Ширина приосевой зоны высоковязкого течения, а также максимальное значение вязкости в этой зоне уменьшаются с ростом  $\eta$ . При этом основная часть течения, за исключением узкой приосевой и рециркуляционной зон, характеризуется невысокими значениями вязкости. Формирование зоны возвратных течений сопровождается ростом эффективной вязкости в этой зоне.

Перейдем к анализу влияния закрутки на структуру течения. На рис. 3 представлено радиальное распределение тангенциальной скорости в потоке с закруткой. Это распределение имеет вид параболы с максимумом в центральной части течения. В результате действия вязких сил происходит замедление вращения жидкости, приводящее к уменьшению значений  $w$ . Вниз по потоку закрутка потока непрерывно уменьшается и уже на незначительном удалении от

завихрителя закрутка потока вырождается, и распределение скоростей приближается к распределению скоростей в незакрученном течении.

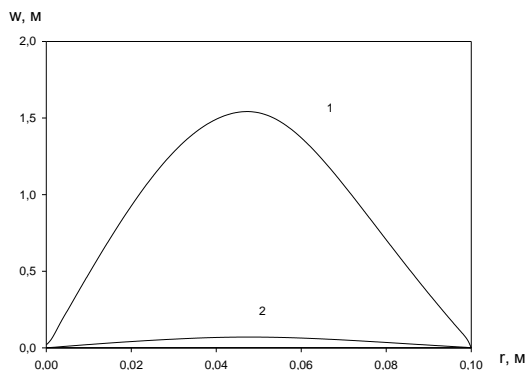


Рис. 3. Радиальное распределение тангенциальной скорости  $w$  для  $\eta=0.4$ : 1 –  $x=0.16$  м, 2 –  $x=0.36$  м, а –  $Ro=4$ , б –  $Ro=8$ .

Центробежные силы, возникающие в закрученном потоке, интенсифицируют радиальное движение газа от оси к цилиндрическим стенкам камеры. В результате закрученных потоков размеры угловой рециркуляционной зоны и интенсивность рециркуляции в ней уменьшается. При этом в результате действия центробежных сил в приосевой части канала формируется зона пониженного давления, которая приводит к формированию приосевой зоны возвратных течений.

Картину течения показывают линии тока (рис. 4).

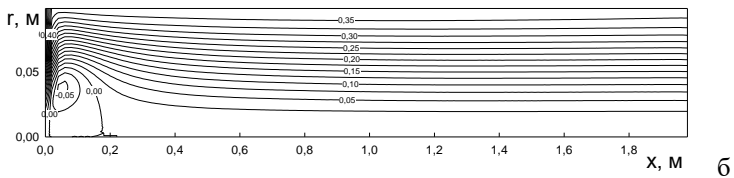
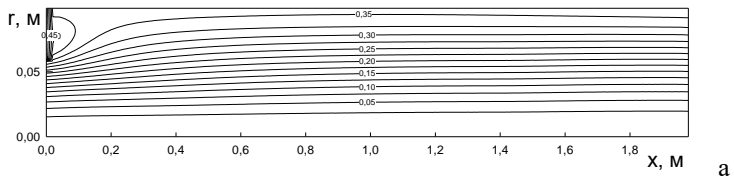


Рис. 4. Линии тока в трубе со скачком сечения для  $\eta=0.4$  : а –  $Ro = 0$ , б –  $Ro = 8$  .

На рис. 5 показано распределение эффективной вязкости закрученного потока в трубе со скачком сечения.

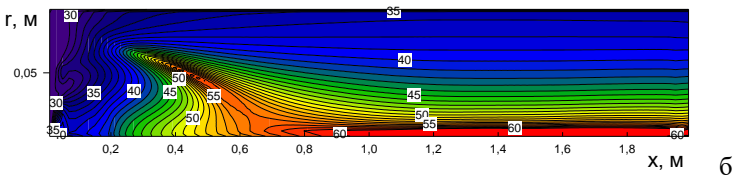
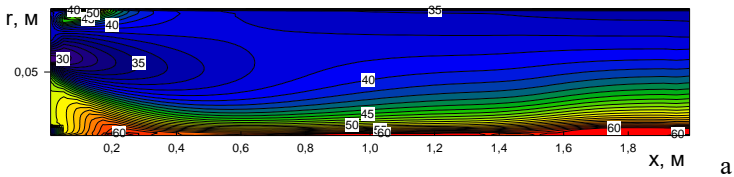


Рис. 5. Изолинии эффективной вязкости в трубе со скачком сечения для  $\eta=0.4$  : а –  $Ro = 0$ , б –  $Ro = 8$  .

Как видно из рисунка, с ростом значений числа Россби  $Ro$  на участке нестабилизированного течения происходит уменьшение значений эффективной вязкости  $\mu_{\text{eff}}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галдина В.Д. *Модифицированные битумы*. Омск: СибАДИ, 2009. – 228 с.
2. Sybilski D. Non-newtonian viscosity of polymer-modified bitumens. *Materials and Structures* 1993. Vol. 26, pp. 15–23. doi:10.1007/BF02472233.
3. Матвиенко О. В., Агафонцева М. В., Базуев В. П. Исследование динамики пузырька в закрученном потоке нелинейно-вязкой жидкости. *Вестник Томского гос. архит.-строит. ун-та*. 2012. № 4, С. 144 –156.
4. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Веник В.Н., Смирнова Н.Г. Экспериментальное исследование процесса кавитации в технологических устройствах. *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2015. № 6. С. 165-176.
5. Матвиенко О. В., Эфа А. К., Базуев В. П., Евтюшкин Е. В. Численное моделирование распада турбулентной струи в спутном закрученном потоке. *Известия вузов. Физика*. 2006. Т. 49, № 6. С. 96-107.
6. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Туркасова Н.Г., Байгулова А.И. Исследование процесса модификации битума в инжекторном смесителе. *Вестник Томского гос. архит.-строит. ун-та*. 2013. № 3. С. 202-213.
7. Базуев В. П., Матвиенко О. В., Вороненко В. Л. Моделирование процесса модифицирования битума в кавитационно-смесительном диспергаторе. *Вестник Томского гос. архит.-строит. ун-та*. 2010. № 4. С. 121-128.
8. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Смирнова Н.Г., Пушкарева Г.В., Дульзон Н.К. Исследование смешения коаксиальных

- закрученных потоков для приготовления битумных дисперсных систем. *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2014. № 3 (44). С. 123-134.
9. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Веник В.Н., Смирнова Н.Г. Численное исследование процесса образования кавитационных пузырьков в смесительном устройстве. *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2014. № 4 (45). С. 231-245.
  10. Малкин А.Я., Исаев А.И; *Реология: концепции, методы, приложения*. – СПб: Профессия, 2007. – 560 с.
  11. Уилкинсон У. Л. *Неньютоновские жидкости*. Москва: Мир, 1964.
  12. Кутепов А. М., Полянин Л. Д., Запрынов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. *Химическая гидродинамика: справочное пособие*. Москва: Бюро Квантум, 1996.
  13. Матвиенко О.В., Унгер Ф.Г., Базуев В.П. *Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем*. Томск: Изд-во ТГАСУ, 2015.
  14. Polacco G., Filippi S., Merusi F., Stastna G. A review of the fundamentals of polymer-modified asphalts: Asphalt/polymer interactions and principles of compatibility. *Adv. Colloid Interface Sci.* – 2015. Vol. 224. P. 72–112.
  15. Золотарев В.А. *Дорожные битумные вяжущие и асфальтобетоны*. Харьков: ХНАДУ, 2014. 180 с.
  16. Матвиенко О.В. Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале. *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2014. Т. 57. № 8-2. С. 183-189.
  17. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале *Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87. № 5. С. 1129-1137.

18. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости Балкли–Гершеля в цилиндрическом канале. *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92. № 1. С. 215 – 226.
19. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости Балкли–Гершеля в цилиндрическом канале. *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92. № 6. С. 2641 – 2651.
20. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале. *Инженерно-Физический журнал*. 2011. Т. 84, № 3. С. 544–547.
21. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале. *Инженерно-Физический журнал*. 2014. Т. 87, № 1. С. 192–199.
22. Матвиенко О. В., Эфа А. К., Базуев В. П., Евтюшкин Е. В. Численное моделирование распада турбулентной струи в спутном закрученном потоке. *Известия вузов. Физика*. 2006. Т. 49, № 6. С. 96-107.
23. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Численное исследование перехода к турбулентному режиму течения внутренних закрученных потоков битумных вяжущих. *Вестник Томского гос. архит.-строит. ун-та*. 2013. № 2. С. 132-143.
24. Матвиенко О.В. Исследование теплообмена и формирования турбулентности во внутреннем закрученном потоке жидкости при низких числах Рейнольдса. *Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87. № 4. С. 908-918.

25. Матвиенко О.В., Асеева А.Е. Математическое моделирование закрученного потока термовязкой псевдопластической жидкости Сиско в цилиндрическом канале. *Инженерно-физический журнал*. 2020. Т. 93. № 4. С. 857-869.
26. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К., Смирнова Н.Г., Агафонова М.В. Численное исследование структуры течения и теплообмена при закрученном течении битумно-дисперсных систем в цилиндрических каналах. *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2014. № 2 (43). С. 80-93.
27. Матвиенко О. В., Литвинова А. Е., Фирсанова Н. С. Исследование структуры течения полимерно-битумного вязущего, описываемого моделью Кросса, в трубе с внезапным расширением. *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. – 2022. – Т. 24, № 5. – С. 151-168. – DOI 10.31675/1607-1859-2022-24-5-151-168.
28. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М: Энергоатомиздат, 1983.
29. Van Doormal J. P., Raithby G. D. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*. 1984. Vol. 7. Pp. 147–163.

## **INVESTIGATION OF THE FLOW OF A SWIRLING FLOW OF A POLYMER-BITUMEN BINDER DESCRIBED BY THE CROSS MODEL IN A CHANNEL WITH A SUDDEN EXPANSION**

N.S. Firsanova<sup>1</sup>, O. V. Matvienko<sup>1,2</sup>, I.S. Cherkasov<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk, 634050, Russia.

<sup>2</sup>Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering, Russia 634003, Tomsk, Solyanaya Square, 2.



E-mail: [matvolegv@mail.ru](mailto:matvolegv@mail.ru), [firnataliya@yandex.ru](mailto:firnataliya@yandex.ru),  
[ilyacherkas@mail.ru](mailto:ilyacherkas@mail.ru)

**Abstract.** *A study of the swirling flow of polymer-bitumen, binder in a channel with a sudden expansion, was carried out. The flow coming from the inlet pipe experiences an expansion associated with a sharp increase in the cross-sectional area. In the space bounded by the outer boundary of the flow and the walls of the channel, the angular recirculation zone is localized. The centrifugal forces generated in the swirling flow intensify the radial motion from the axis to the cylindrical walls. As a result, the size of the corner recirculation zone and the intensity of recirculation in it decrease. With a strong twist of the flow, the axial region of the return flows is formed. The formation of the angular zone of return flows is accompanied by an increase in the values of effective viscosity in it. With the twist of the flow in the section of the unstabilized flow, the effective viscosity values decrease.*

**Keywords:** *rheology, bituminous binders, viscosity, non-Newtonian fluids, cross model, swirling flow.*

УДК 519.6

**РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА  
АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ  
ПЕРЕНОСА**

А.С. Чижова, В.И. Лаева

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина 36, 634050

E-mail: [chizhova\\_anna@icloud.com](mailto:chizhova_anna@icloud.com)

***Аннотация.** В работе рассматриваются явные компактные разностные схемы: двухслойная схема «кабаре» и бикомпактная интерполяционно-характеристическая схема, второго и третьего порядка аппроксимации соответственно. Проведен сравнительный анализ рассмотренных разностных схем на решении тестовых задач в случае гладких и разрывных начальных условий.*

***Ключевые слова:** компактная разностная схема, аппроксимация, устойчивость, линейное уравнение переноса.*

В настоящее время существует большое количество разностных схем для численного решения задачи Коши одномерного уравнения переноса. Это можно объяснить тем, что уже на простейшем уравнении конвективного переноса с постоянной скоростью проявляются проблемы характерные для решения уравнений гиперболического типа. Целью данной работы является проведение сравнительного анализа компактных разностных схем высокого порядка аппроксимации. Двухслойная схема «кабаре» [1] основана на введении двух различных типов переменных – «консервативных» и «поточковых», отвечающих за восстановление достаточных условий монотонности. В интерполяционно-характеристической схеме [2] значение искомой функции на верхнем временном слое приравнивается

значению функции в точке пересечения выпущенной назад характеристики с нижним временным слоем.

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const}, \quad (1)$$

с начальным и граничным условиями

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq X, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u_0(0) = \varphi(0). \quad (3)$$

Для численного решения поставленной задачи Коши (1) – (3) рассмотрены явные конечно-разностные схемы, устойчивые при числе Куранта  $K = |a| \frac{\tau}{h} \leq 1$ , где  $h$  и  $\tau$  – шаги разностной сетки по пространственной и временной переменным соответственно.

**Двухслойная схема «кабаре»** [1] имеет вид

$$\frac{\theta_{j+1/2}^{n+1/2} - \theta_{j+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (4)$$

$$u_{j+1}^{n+1} = 2\theta_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n, \quad (5)$$

где  $u_j^n$  – «потокосые» значения искомой функции в узлах разностной сетки,  $\theta_{j+1/2}^{n+1/2}$  – «консервативные» значения, относящиеся к середине расчетной ячейки.

Если  $u(x, t) \in C_3^3(\bar{G})$ ,  $\bar{G} = \{(x, t) | x \in [0, X], t \in [0, T]\}$ , то схема (4) – (5) имеет погрешность аппроксимации

$$O(\tau^2 + h^2) = h^2 \left( \frac{a}{6} \frac{\partial^3 u(\hat{x}, t^n)}{\partial x^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u(\hat{x}, \hat{t})}{\partial t \partial x^2} \right) + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u(x_j, \bar{t})}{\partial t^3} + \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^3 u(\hat{x}, \hat{t})}{\partial t^2 \partial x},$$

где  $\hat{x} \in (x_j, x_j + h)$ ,  $\hat{t} \in (t^n, t^n + \tau)$ ,  $\bar{t} \in (t^n - \tau, t^n + \tau)$ .

Преимущество двухслойного представления схемы «кабаре» в отличие от трехслойной схемы [3] заключается в использовании компактного вычислительного шаблона, где операции проводятся с данными из двух соседних временных слоев внутри одной расчетной ячейки.

При нарушении условий принципа максимума в пределах расчетной ячейки в [1] предлагается нелинейная коррекция значения потоковых переменных

$$u_{j+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{u}_{j+1}^{n+1}, & \text{если } -u_{j+1/2}^n < \tilde{u}_{j+1}^{n+1} < +u_{j+1/2}^n, \\ +u_{j+1/2}^n, & \text{если } \tilde{u}_{j+1}^{n+1} \geq +u_{j+1/2}^n, \\ -u_{j+1/2}^n, & \text{если } -u_{j+1/2}^n \geq \tilde{u}_{j+1}^{n+1}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $-u_{j+1/2}^n = \min(u_j^n, u_{j+1}^n)$ ,  $+u_{j+1/2}^n = \max(u_j^n, u_{j+1}^n)$ ,

$$\tilde{u}_{j+1}^{n+1} = 2 \left( \theta_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n \right),$$

и консервативных переменных

$$\theta_{j+1/2}^{n+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2}^{n+1/2} + \left[ W_{j+1}^{n+1/2} - W_j^{n+1/2} \right], \quad (7)$$

где

$$\tilde{\theta}_{j+1/2}^{n+1/2} = \theta_{j+1/2}^{n-1/2} - \frac{\alpha\tau}{h} (u_{j+1}^n - u_j^n),$$

$$W_{j+1}^{n+1/2} = \begin{cases} 0, & \text{если } -u_{j+1/2}^n \leq \tilde{\theta}_{j+1/2}^{n+1/2} \leq +u_{j+1/2}^n, \\ \tilde{\theta}_{j+1/2}^{n+1/2} - +u_{j+1/2}^n, & \text{если } \tilde{\theta}_{j+1/2}^{n+1/2} > +u_{j+1/2}^n, \\ \tilde{\theta}_{j+1/2}^{n+1/2} - -u_{j+1/2}^n, & \text{если } -u_{j+1/2}^n > \tilde{\theta}_{j+1/2}^{n+1/2}. \end{cases}$$

**Бикompактная интерполяционно-характеристическая (БИХ) схема** [2] разработана на основе расширенной системы уравнений, которая строится путём введения первообразной функции  $v$  от решения  $u$  уравнения (1) по формуле  $v_x = u$ .

Расширенная система уравнений имеет вид

$$u_t + au_x = 0, \quad v_t + av_x = 0, \quad (8)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(0, t) = \varphi_2(t),$$

$$v(x, 0) = \int_0^x \varphi_1(z) dz, \quad v(0, t) = \mu(t).$$

Для оценки значения функции  $v$  в точке  $(x^*, t^n)$ , где  $x^*$  – точка пересечения характеристики с нижней границей ячейки, строится кубический интерполяционный полином Эрмита  $H(x)$  по значениям  $u_j^n, u_{j+1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n$ . А для оценки значения функции  $u$  в точке  $(x^*, t^n)$  берется производная от полученного полинома.

Сеточные значения  $v_{j+1}^{n+1}$  и  $u_{j+1}^{n+1}$  вычисляются соответственно по формулам

$$v_{j+1}^{n+1} = H(x^*), \quad u_{j+1}^{n+1} = H_x(x^*). \quad (9)$$

Подставляя в правую часть формул (9) значение  $x^* = x_j + h(1 - K)$ , получим разностную схему для решения системы уравнений (8)

$$u_{j+1}^{n+1} = K(3K - 2)u_j^n + (1 - K)(1 - 3K)u_{j+1}^n + 6K(1 - K)A, \quad (10)$$

$$v_{j+1}^{n+1} = v_j^n + h(1 - K)[(1 - K)(1 + 2K)A + K^2u_j^n - K(1 - K)u_{j+1}^n], \quad (11)$$

где  $A = \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h}$ .

Если  $u(x, t) \in C_3^3(\bar{G})$ , то схема (10) – (11) имеет погрешность аппроксимации

$$O(\tau^3 + h^3) = \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_j, \hat{t})}{\partial t^3} + \frac{h^2 \tau}{2} \left( \frac{5a}{6} \frac{\partial^3 u(\hat{x}, t^n)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u(x_j, \hat{t})}{\partial t \partial x^2} \right) + \frac{h\tau^2}{2} \left( \frac{\partial^3 u(x_j, \hat{t})}{\partial t^2 \partial x} - \frac{a^2}{2} \frac{\partial^3 u(\hat{x}, t^n)}{\partial x^3} \right),$$

где  $\hat{x} \in (x_j, x_j + h)$ ,  $\hat{t} \in (t^n, t^n + \tau)$ .

Для проведения численного эксперимента рассматривались две задачи для линейного уравнения переноса.

**Тестовая задача 1.** Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса с гладким начальным условием

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, \\ u(x, 0) &= \sin(x), \quad x \in [0, X], \\ u(0, t) &= \sin(-at), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (12)$$

Точное решение задачи (12)

$$u(x, t) = \sin(x - at). \quad (13)$$

Задача (12) решалась с помощью представленных выше разностных схем (4) – (7) и (10) – (11). Расчёты производились на равномерных сетках при следующих условиях:  $a = 1$ , количество узлов  $N = 100$  и  $N = 200$ , шаг сетки  $h = X/N$ ,  $X = 2$ ,  $T = 1$ с, число Куранта  $K = 0,2$ .

Численные решения, полученные по разностным схемам (4) – (7) и (10) – (11) для задачи (12) совпадают с аналитическим решением (13). Максимальная абсолютная погрешность решения по БИХ схеме равна  $1.27 \cdot 10^{-7}$  ( $N = 100$ ) и  $1.59 \cdot 10^{-8}$  ( $N = 200$ ), а по двухслойной схеме «кабаре» равна  $2.26 \cdot 10^{-5}$  ( $N = 100$ ) и  $5.66 \cdot 10^{-6}$  ( $N = 200$ ) соответственно, что согласуется с порядком аппроксимации рассматриваемых схем для гладких решений.

**Тестовая задача 2.** Рассмотрим задачу распространения прямоугольного импульса, находящегося в начальный момент времени на отрезке  $[0.25; 0.75]$ :

$$u_t + au_x = 0, \quad (14)$$

с начальным и граничным условиями

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in [0.25; 0.75], \\ 0, & x \notin [0.25; 0.75], \end{cases} \quad (15)$$

$$u(0, t) = 0. \quad (16)$$

Аналитическое решение задачи (17) – (19):

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x - at \in [0.25; 0.75], \\ 0, & x - at \notin [0.25; 0.75]. \end{cases} \quad (17)$$

На рисунках 1 – 2 приведены сравнения точного решения (сплошная линия) и численных расчетов (обозначены треугольниками) полученных с помощью рассмотренных выше схем на расчетной сетке  $N = 100$ .

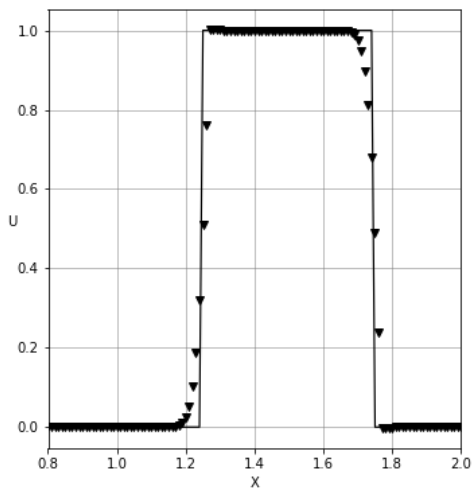


Рис. 1. Решение тестовой задачи 2 на основе двухслойной схемы «кабаре».

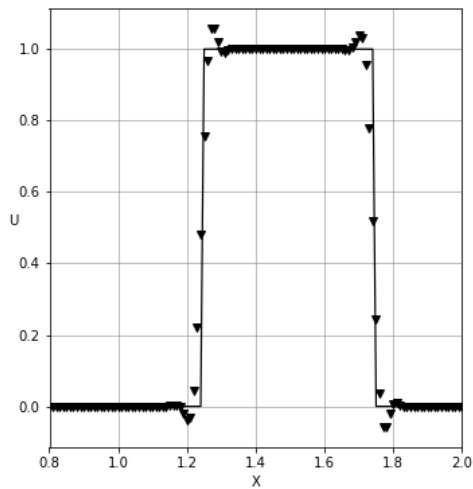


Рис. 2. Решение тестовой задачи 2 на основе БИХ схемы.

Из рис. 1 видно, что численное решение, полученное двухслойной схемой «кабаре» с использованием нелинейной монотонизации, хорошо согласуется с аналитическим решением (17). Численное решение, полученное БИХ схемой, представлено на рис. 2. Из рисунка видно, что бикompактная схема дает небольшие осцилляции вблизи точек разрыва точного решения.

Для сравнения степени согласования расчетов с точным решением рассматривались нормы:

$$\|\cdot\|_C = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j^n - u(x_j, t^n)|, \quad \|\cdot\|_{L_1} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N |u_j^n - u(x_j, t^n)|,$$

$$\|\cdot\|_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^N |u_j^n - u(x_j, t^n)|^2}.$$

В таблице 1 показаны нормы погрешности численных решений задачи 2, полученных на расчетных сетках  $N = 100$  и  $N = 200$ . Из таблицы видно, что по нормам  $C, L_1, L_2$ , схемы (4) – (7) и (10) – (11) показывают почти одинаковые результаты. Увеличение узлов расчетной сетки не дает уменьшения максимальной абсолютной погрешности расчетов, но значения погрешностей по нормам  $L_1, L_2$  уменьшаются.

Таблица 1

Сравнение норм погрешности численных решений задачи 2.

Метод	$N = 100$			$N = 200$		
	$\ \cdot\ _C$	$\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _C$	$\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$
Двухслойная схема «кабаре» (4) – (7)	0.462	0.046	0.083	0.489	0.029	0.067
БИХ схема (10) – (11)	0.476	0.042	0.078	0.481	0.026	0.059



**Заключение.** В работе был проведен сравнительный анализ двухслойной схемы «кабаре» и бикомпактной интерполяционно-характеристической схемы. Показано, что для гладких решений схема «кабаре» имеет второй порядок, а БИХ схема – третий порядок аппроксимации. Получены численные решения смешанной задачи Коши для линейного уравнения переноса с разной гладкостью начальных данных. В случае разрывных начальных данных обе схемы показывают одинаковую погрешность численного решения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М., Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными, // Математическое моделирование, 2003, том 15, номер 9, 29 – 48.
2. Рогов Б.В., Бикомпактная интерполяционно-характеристическая схема третьего порядка аппроксимации для линейного уравнения переноса, // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2020, №106, 20с.
3. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 86 – 100.

### HIGH-ORDER APPROXIMATION DIFFERENCE SCHEMES FOR LINEAR TRANSPORT EQUATION

A.S. Chizhova, V.I. Laeva

National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str. 36, 634050

E-mail: [chizhova\\_anna@icloud.com](mailto:chizhova_anna@icloud.com)

**Abstract.** *The article discusses an explicit compact difference scheme: a two-layer cabaret scheme and a compact interpolation characteristic scheme of the second and third order of approximation, respectively. A comparative analysis of the considered difference schemes for solving test problems under smooth and discontinuous initial conditions is carried out.*

**Keywords:** *compact difference scheme, approximation, stability, linear transport equation.*

УДК 517.55\*512.7

## УСЛОВИЕ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ КРАТНЫХ КОРНЕЙ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЛОРАНА

С.Ю. Чувашов, И.А. Антипова

Сибирский федеральный университет,

Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, 660041

E-mail: [simontahkraa@gmail.com](mailto:simontahkraa@gmail.com), iantipova@sfu-kras.ru

**Аннотация.** В настоящей работе исследуется дискриминантное множество общего полиномиального отображения, ассоциированного с системой полиномов Лорана, в которой множества показателей фиксированы, а все коэффициенты переменные. Получено достаточное условие наличия невырожденных кратных корней в специальном случае общего полиномиального отображения.

**Ключевые слова.** Система полиномов Лорана, дискриминантное множество,  $A$ -дискриминант, смешанный дискриминант, невырожденный кратный корень.

В монографии [1] Гельфандом, Зелевинским и Капрановым предложена и развита концепция  $A$ -дискриминанта.

Пусть  $A$  – конечное подмножество целочисленной решетки  $\mathbb{Z}^n$ , каждому элементу  $\lambda \in A$  соответствует моном Лорана  $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$ . Рассмотрим пространство  $\mathbb{C}^A$  полиномов Лорана вида  $f(y) = \sum_{\lambda \in A} a_\lambda y^\lambda$  и множество  $\nabla^0 := \{f \in \mathbb{C}^A \mid \exists y^0 \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n: f(y^0) = (\partial f / \partial y_i)(y^0) = 0 \forall i\}$ . Обозначим через  $\nabla_A$  замыкание множества  $\nabla^0$ .

**Определение 1.** Если множество  $A \subset \mathbb{Z}^n$  таково, что  $\nabla_A$  является подмногообразием коразмерности 1, то единственный с точностью до знака неприводимый полином  $\Delta_A(f)$  от коэффициентов полиномов  $f \in \mathbb{C}^A$ ,  $\lambda \in A$ , который обращается в ноль на  $\nabla_A$ , называется  $A$ -дискриминантом. Если  $\text{codim} \nabla_A > 1$ , полагают  $\Delta_A(f) = 1$ .

Понятие смешанного дискриминанта системы  $n$  полиномов Лорана от  $n$  неизвестных было предложено в работе [2]. Рассмотрим систему полиномов Лорана с носителями  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \subset \mathbb{Z}^n$ :

$$f_i(y) = \sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_{i,\lambda} y^\lambda, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Следуя терминологии работы [2], изолированное решение  $u \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$  системы (1) назовем невырожденным кратным корнем, если  $n$  градиентов системы  $\nabla_y f_i(u)$  линейно зависимы, но любые  $n - 1$  из них линейно независимы.

**Определение 2.** *Смешанным дискриминантным множеством*  $\nabla_{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}}$  называют замыкание множества коэффициентов  $a_{i,\lambda}$ , для которых система (1) имеет невырожденный кратный корень. Если дискриминантное множество  $\nabla_{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}}$  является гиперповерхностью, то *смешанным дискриминантом* системы (1) называют единственный с точностью до знака неприводимый полином  $\Delta_{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}}$  с целыми коэффициентами от переменных  $a_{i,\lambda}$ , определяющий его. В противном случае говорят, что система имеет *дефект*, и полагают  $\Delta_{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}} = 1$ .

Дискриминантное множество общего полиномиального отображения исследовано в работе [3], где найдена его параметризация, являющаяся обращением логарифмического отображения Гаусса. Пусть

$$f := (f_1, \dots, f_n): (\mathbb{C} \setminus 0)^n \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

есть общее полиномиальное отображение, ассоциированное с системой (1). Обозначим через  $\nabla^0$  множество точек  $a = (a_{i,\lambda})$  в пространстве коэффициентов таких, что отображение  $f$  имеет кратные корни в алгебраическом торе  $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ , т.е.

$$\nabla^0 := \{a \mid f_1(y^0) = \dots = f_n(y^0) = (\partial f / \partial y)(y^0) = 0, \\ y^0 \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n\}.$$

**Определение 3.** *Дискриминантным множеством*  $\nabla$  отображения  $f$  называется замыкание множества  $\nabla^0$  в пространстве коэффициентов.

В Определении 2 в отличие от Определения 3 требуется дополнительное условие невырожденности кратных корней. Мы исследуем условия на носитель системы, при которых дискриминантные множества в смысле определений 2 и 3 совпадают. Рассмотрим общую систему из двух уравнений с произвольным числом мономов, с неизвестными  $y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^2$ , переменными коэффициентами  $a_{i,\lambda} \in \mathbb{C}$ .

Как показано в [3], при определенных условиях на носителе уравнений системы (1) с помощью мономиальных преобразований коэффициентов она может быть приведена к виду

$$\begin{cases} y_1^{\omega_1^{(1)}} y_2^{\omega_2^{(1)}} + x_1^{(1)} y_1^{p_1} y_2^{q_1} + \dots + x_l^{(1)} y_1^{p_l} y_2^{q_l} - 1 = 0, \\ y_1^{\omega_1^{(2)}} y_2^{\omega_2^{(2)}} + x_1^{(2)} y_1^{u_1} y_2^{v_1} + \dots + x_m^{(2)} y_1^{u_m} y_2^{v_m} - 1 = 0, \end{cases}$$

где  $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}$  - новые переменные коэффициенты,  $\omega = (\omega_j^{(i)})$  - невырожденная матрица.

**Теорема 1.** Если матрицы

$$\Phi := \omega^{-1} \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_l & u_1 & \dots & u_m \\ q_1 & \dots & q_l & v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix}, \tilde{\Phi} := \Phi - \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

не содержат нулевых элементов, то система (2) имеет невырожденный кратный корень, т.е. дискриминантное множество  $\nabla$  в смысле Определения 3 совпадает со смешанным дискриминантным множеством  $\nabla_{A^{(1)}, A^{(2)}}$  в смысле Определения 2.

В доказательстве теоремы 1 мы используем параметризацию кратных корней системы полиномов Лорана (см. [4]) и параметризацию дискриминантного множества системы (см. [3]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkhäuser, 1994.

2. Cattani E., Cueto M.A., Dickenstein A., DiRocco S., Sturmfels B., Mixed discriminants, *Math. Z.* 274 (2013), 761–778.
3. Антипова И.А., Цих А.К. Дискриминантное множество системы  $n$  полиномов Лорана от  $n$  переменных // *Изв. РАН. Сер. матем.* - 2012. - Т. 76., № 5. - С. 29–56.
4. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений // *Матем. сб.*- 2018. - Т. 209., № 10. - С. 3–30.

## NON-DEGENERACY CONDITION OF MULTIPLE ROOTS OF A SYSTEM OF LAURENT POLYNOMIALS

S. Chuvashov, I. Antipova

Siberian Federal University, Russia, Krasnoyarsk, Svobodny pr., 79, 660041

E-mail: [simontahkraa@gmail.com](mailto:simontahkraa@gmail.com), [iantipova@sfu-kras.ru](mailto:iantipova@sfu-kras.ru)

**Abstract.** *The paper deals with the discriminantal variety of a general polynomial mapping associated with the system of Laurent polynomials in which the sets of exponents are fixed and all coefficients are variable. A sufficient non-degeneracy condition of multiple roots of a general polynomial mapping in a special case is obtained.*

**Keywords.** *A system of Laurent polynomials, discriminantal variety, A-discriminant, mixed discriminant, non-degenerate multiple root.*