

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Молодежная научная конференция
«Все грани математики и механики»
(24–30 апреля 2015 г.)**

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

УДК 51
ББК 22
М754

М754 Молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» : сборник статей / под ред. А.В. Старченко. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. – 184 с.

ISBN 978-5-94621-518-3

В сборнике представлены статьи, посвященные актуальным проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач.

Для студентов, аспирантов, молодых ученых.

УДК 51
ББК 22

ISBN 978-5-94621-518-3 © Томский государственный университет, 2015
© Авторы статей, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Фуксон С.Л., Гриншпон С.Я. Отношение ортогональности в мультипликативной группе	6
Зарубина М.А. О некоторых соотношениях кольца, влекущих его коммутативность	13
Костарев А.А., Щербаков Н.Р. Геометрическое моделирование процесса обработки профильной фрезой деталей передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением	16
Курганков К.Е. Расстояние до алгебраической поверхности (на примере эллипсоида)	22
Щёголева А.А., Щербаков Н.Р. Полное эксцентриково-циклоидальное зацепление в конической передаче	27
Агафонцев М.В., Лобода Е.Л. Исследование полей температуры в пламени с применением методов ИК-диагностики	31
Кожевников Д.А., Шерemet М.А. Численный анализ сопряженного конвективного теплообмена в полости с пористой вставкой	36
Носонов И.И., Шерemet М.А. Исследование режимов смешанной конвекции в прямоугольной полости при наличии изотермической стенки	43
Бакчанина Е.М. Некоторые свойства отображений на области с симметриями	50
Мельникова И.А. Некоторые случаи интегрируемости уравнения типа Левнера	54
Амшарюк Е.И., Федорова О.П. Выбор признаков при решении задачи кластеризации	57
Катеринский Д.А., Шульга С.А. Численное решение дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с поглотителем	62
Мыльникова Е.В., Колесникова С.И. Управление в модели Ферхюльста	67

Пчёлкина Д.Е., Зюзьков В.М. Применение системы Mathematica в решении задач вычисления площадей, длин и объемов	70
Осипов В.А., Меркулова Н.Н. Построение адаптивных сеток в задаче об изменении концентрации ауксина	77
Потоцкая А.А., Михайлов М.Д. Исследование задачи о разрушении плотины	84
Семёнов Е.В. Решение обратной одномерной задачи электроимпедансной томографии с помощью нейронных сетей	89
Семёнова А.А. Разностные схемы решения уравнения переноса, использующие интерполяционные многочлены	97
Терентьева М.В., Ситников Г.И. Параметризация тепло- и влагообмена на поверхности земли и в почве для одномерной модели атмосферного пограничного слоя	103
Уколов Р.Ю., Меркулова Н.Н. Исследование модели типа «реакция-диффузия» с использованием явной схемы и схемы Кранка-Николсон	109
Бондаренко И.А., Пчелинцев Е.А. Статистическое исследование эпистемологических установок студентов в кросс-культурном контексте	116
Чернушенко К.А., Емельянова Т.В. Статистическая оценка влияния стоимости энергоресурсов на курс национальной валюты (на примере казахстанского тенге)	122
Дьяченко Ю.В., Емельянова Т.В. Исследование обнаружения момента разладки процесса авторегрессии первого порядка	128
Емельянова Т.В., Иванюк Ю.В. Оценивание параметров непрерывной авторегрессии с использованием последовательной процедуры	134
Ивашенко А.О., Емельянова Т.В. Оценивание параметра модели авторегрессии первого порядка с дискретным временем	140
Конищева А.А., Емельянова Т.В. Статистическое моделирование формирования курса валют (на примере китайского юаня и корейского вона)	146
Шайкина А.А., Пчелинцев Е.А. Исследование качества регрессионных моделей колебаний курсов валют	153

Вежнина О.А., Емельянова Т.В. Об оценке спектральной плотности	160
Завьялова А.В. Статистические проблемы языка	165
Головина Н.П., Хмылева Т.Е. Совпадение индуцированной и порядковой топологий на подмножестве	169
Клековкин В.Г., Хмылева Т.Е. Исследование раздельно непрерывных и квазинепрерывных функций	173
Реброва М.О., Гулько С.П. Об универсальных метрических пространствах	176
Сухачева Е.С., Хмылева Т.Е. Гомеоморфность подмножеств «двойной стрелки»	180

Отношение ортогональности в мультипликативной группе \mathbb{Q}_+

С.Л. Фуксон, С.Я. Гриншпон

Томский государственный университет
E-mail: foug.son.ya@gmail.ru

В марте 2013 года International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences опубликовал статью «Perpendicularity in an Abelian Group», написанную Naukkanen и др. Основная цель статьи – введение понятия бинарного отношения ортогональности в произвольной абелевой группе. Цель данного исследования – получить некоторые результаты об ортогональностях мультипликативной абелевой группы положительных рациональных чисел \mathbb{Q}_+ . Основным результатом статьи – построение бесконечного множества ортогональностей \mathbb{Q}_+ двумя различными способами.

Ключевые слова: ортогональность, группа, абелева группа, скалярное произведение, НОД.

Всё больше геометрические понятия проникают в пространство изучения алгебры. В марте 2013 года International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences опубликовал статью «Perpendicularity in an Abelian Group». Основная цель статьи – введение понятия бинарного отношения ортогональности в произвольной абелевой группе. Отношение ортогональности в различных алгебраических структурах уже вызывало интерес математиков. Так, например, Davis изучает ортогональность в кольцах [2], Векслер рассматривает ортогональность в решётках и решёточно упорядоченных группах [3]. Цель данной работы – получить некоторые результаты об ортогональностях мультипликативной абелевой группы положительных рациональных чисел \mathbb{Q}_+ .

В [1] Naukkanen и другие вводят понятие ортогональности в абелевой группе с помощью аксиом, которые оказываются вполне естественными, если придать им геометрическую интерпретацию.

Пусть $G = (G, +)$ – аддитивная абелева группа. Пусть \perp – бинарное отношение в G , удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$(A1) \forall a \in G : \exists b \in G : a \perp b,$$

$$(A2) \forall a \in G \setminus \{0\} : a \not\perp a,$$

$$(A3) \forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow b \perp a,$$

$$(A4) \forall a, b, c \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b + c),$$

$$(A5) \forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp -b.$$

Отношение \perp называется *ортогональностью* в G [1].

Так как в настоящей работе будет рассматриваться мультипликативная группа, то аксиомы (A2), (A4), (A5) лучше переписать в следующем виде:

$$(A2) \forall a \in G \setminus \{1\} : a \not\perp a,$$

$$(A4) \forall a, b, c \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b \cdot c),$$

$$(A5) \forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp b^{-1}.$$

Авторы [1] приводят различные примеры ортогональностей, исследуют ортогональности циклической группы \mathbb{Z}_n и строят некоторые ортогональности мультипликативной группы \mathbb{Q}_+ , где \mathbb{Q}_+ – множество положительных рациональных чисел. Авторы утверждают, что группа \mathbb{Q}_+ обладает, как минимум, тремя ортогональностями и затем изучают их взаимосвязи. В настоящей статье мы приводим доказательства некоторых результатов, сформулированных в [1], показываем, что авторами [1] была допущена ошибка при построении одной из трёх ортогональностей, а также строим двумя способами бесконечное множество ортогональностей \mathbb{Q}_+ .

Очевидно, что любое рациональное положительное число может быть выражено как

$$c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(c)},$$

где $v_p(c) \in \mathbb{Z}$ для каждого $p \in \mathbb{P}$ и лишь конечное число из них ненулевые.

С каждым элементом группы \mathbb{Q}_+ связана последовательность целых чисел. Так числу c ставится в соответствие последовательность $(v_2(c), v_3(c), \dots, v_p(c), \dots)$.

Отображение $f(c) = (v_2(c), v_3(c), \dots, v_p(c), \dots)$ является изоморфизмом из (\mathbb{Q}_+, \cdot) на $(S, +)$, где S – множество всех последовательностей $(n_2, n_3, \dots, n_p, \dots)$, где индекс пробегает множество простых чисел и каждое $n_p \in \mathbb{Z}$. На каждую последовательность S можно посмотреть как на вектор.

Определение 1. Скалярным произведением чисел a и b называется скалярное произведение векторов $f(a)$ и $f(b)$:

$$\langle a, b \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b).$$

Определим $|c| = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(c)}$, положив $v_p(|c|) = |v_p(c)|$ для всех $p \in \mathbb{P}$ [1].

Определим бинарное отношение \perp_1 следующим образом:

$$a \perp_1 b \Leftrightarrow \langle |a|, |b| \rangle = 0.$$

Теорема 2. Отношение \perp_1 является ортогональностью группы \mathbb{Q}_+ [1].

Доказательство.

(A1) В роли b достаточно взять $b = 1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot \dots \cdot p^0 \cdot \dots$

$$f(|b|) = (0, 0, \dots) \Rightarrow \forall a \in G \left(\langle |a|, |b| \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| \cdot 0 = 0 \right).$$

$$(A2) \langle |a|, |a| \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall p v_p(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$(A3) \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b)| = 0 \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(b)| |v_p(a)| = 0.$$

$$(A4) \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b)| = 0 \Rightarrow \forall p (v_p(a) = 0 \vee v_p(b) = 0),$$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(c)| = 0 \Rightarrow \forall p (v_p(a) = 0 \vee v_p(c) = 0),$$

$$\text{следовательно } \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b \cdot c)| = 0.$$

$$(A5) \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b)| = 0 \Rightarrow \forall p (|v_p(a)| = 0 \vee |v_p(b)| = 0).$$

$$|v_p(b)| = 0 \Rightarrow |v_p(b^{-1})| = 0 \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} |v_p(a)| |v_p(b^{-1})| = 0.$$

Таким образом, бинарное отношение \perp_1 является ортогональностью группы \mathbb{Q}_+ .

Пример 3. Пусть $a = \frac{49}{50}, b = \frac{1}{3}$.

$$a = 2^{-1} \cdot 5^{-2} \cdot 7^2,$$

$$|a| = 2^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 2450,$$

$$f(a) = (-1, 0, -2, 2, 0, 0, \dots),$$

$$f(|a|) = (1, 0, 2, 2, 0, 0, \dots),$$

$$b = 3^{-1},$$

$$|b| = 3^1 = 3,$$

$$f(b) = (0, -1, 0, 0, \dots),$$

$$f(|b|) = (0, 1, 0, 0, \dots),$$

$$\langle |a|, |b| \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 + \dots = 0.$$

Таким образом, $\frac{49}{50} \perp_1 \frac{1}{3}$.

Теорема 4. Бинарное отношение \perp_2 , определённое как

$$a \perp_2 b \Leftrightarrow \langle a, b \rangle = 0,$$

является ортогональностью группы \mathbb{Q}_+ [1].

Доказательство. Аксиомы (A1), (A2), (A3) проверяются аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 2. Покажем справедливость аксиом (A4) и (A5).

$$(A4) \quad a \perp_2 b \wedge a \perp_2 c \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) = \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(c) = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b \cdot c) &= \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) (v_p(b) + v_p(c)) = \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) + \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(c) = 0. \end{aligned}$$

$$(A5) \quad a \perp_2 b \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) = 0 \Rightarrow -\sum_{p \in \mathbb{P}} v_p(a) v_p(b) = 0 \Rightarrow a \perp_2 b^{-1}.$$

Пример 5. $6 \perp_2 \frac{2}{3}$, однако $6 \not\perp_1 \frac{2}{3}$.

$$6 = 2^1 \cdot 3^1, \quad \frac{2}{3} = 2^1 \cdot 3^{-1},$$

$$\left\langle 6, \frac{2}{3} \right\rangle = 0 \Rightarrow 6 \perp_2 \frac{2}{3},$$

$$\left\langle |6|, \left| \frac{2}{3} \right| \right\rangle = 2 \neq 0 \Rightarrow 6 \not\perp_1 \frac{2}{3}.$$

Последняя ортогональность группы \mathbb{Q}_+ , указанная в [1], связана с работой Eugeni и Rizzi [4]. Для того чтобы определить её суть, заметим следующее.

Замечание 6. Для любых двух чисел $a, b \in \mathbb{Q}_+$ существует единственный $\text{НОД}_\gamma(a, b)$ такой, что

$$d = \text{НОД}_\gamma \left(\frac{m}{u}, \frac{n}{v} \right) = \frac{\text{НОД}(m, n)}{\text{НОД}(u, v)}.$$

Авторы [1] определяют отношение \perp_{ER} как ортогональность следующим образом:

$$a \perp_{ER} b \Leftrightarrow \text{НОД}_\gamma(a, b) = 1 \Leftrightarrow \text{НОД}(m, n) = \text{НОД}(u, v) = 1 \quad [1].$$

Однако, проверяя, является ли \perp_{ER} ортогональностью, мы пришли к противоречию с аксиомой (A5): если $a = \frac{m}{u}, b = \frac{n}{v} \left(b^{-1} = \frac{v}{n} \right)$ и $(m, n) = (u, v) = 1$, то не всегда выполнимо $(m, v) = (u, n) = 1$.

Пример 7. Пусть $a = \frac{2}{9}, b = \frac{3}{16} (b^{-1} = \frac{16}{3})$.

$$\text{НОД}_\gamma \left(\frac{2}{9}, \frac{3}{16} \right) = 1 \Rightarrow a \perp_{ER} b$$

Однако $\text{НОД}_\gamma \left(\frac{2}{9}, \frac{16}{3} \right) \neq 1 \Rightarrow a \not\perp_{ER} b^{-1}$.

Нам удалось построить бесконечное множество ортогональностей мультипликативной группы \mathbb{Q}_+ следующими двумя способами.

Рассмотрим произвольную последовательность положительных действительных чисел $\{k_i\}$. Для любых $a, b \in \mathbb{Q}_+$ можно составить следующую сумму

$$s_{a,b} = \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b).$$

Зададим отношение \perp_k следующим образом:

$$a \perp_k b \Leftrightarrow s_{a,b} = 0.$$

Теорема 8. Отношение \perp_k – ортогональность в \mathbb{Q}_+ .

Доказательство. Зафиксируем произвольную последовательность $\{k_i\}$.

(A1) Достаточно положить $b = 1$. Тогда

$$\forall a \in G, s = \sum_{p \in \mathbb{P}} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(1) = 0.$$

(A2) Так как $\forall i k_i > 0$, то

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

(A3) $\sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} k_i \cdot v_{p_i}(b) \cdot v_{p_i}(a) = 0.$

$$(A4) \quad a \perp_k b \wedge a \perp_k c \Rightarrow \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(c) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b \cdot c) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot (v_{p_i}(b) + v_{p_i}(c)) =$$

$$\sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) + \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(c) = 0.$$

$$(A5) \quad a \perp_k b \Rightarrow \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b^{-1}) = -\sum_{i=1}^n k_i \cdot v_{p_i}(a) \cdot v_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow a \perp_k b^{-1}.$$

Таким образом, отношение \perp_k является ортогональностью в \mathbb{Q}_+ .

Пример 9. Пусть $\{k_i\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^9, f(a) = (1, 2, 9),$$

$$b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2}, f(b) = (4, 2, -2),$$

$$s_{a,b} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot (-2) = 0.$$

Следовательно, $a \perp_k b$. Заметим, что $a \not\perp_1 b, a \not\perp_2 b$.

Рассмотрим второй способ построения бесконечного множества ортогональностей \mathbb{Q}_+ . Пусть числа $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что для любых

$r, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ выполняется $m \neq n^{\frac{r}{k}}$.

Для любых $a, b \in \mathbb{Q}_+$ положим

$$a \perp_d b \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} : (a = m^u \wedge b = n^v) \vee (a = n^v \wedge b = m^u) \vee \\ a = 1 \vee b = 1.$$

Теорема 10. Отношение \perp_d – ортогональность в \mathbb{Q}_+ .

Доказательство. Проверим справедливость аксиом (A1)–(A5).

(A1) Положим $b = 1$. Из определения отношения \perp_d следует, что для любого a справедливо $a \perp_d 1$.

(A2) Если предположить, что $a \perp_d a$, то $a = m^u = n^v$, однако $m \neq n^{\frac{r}{k}}$ ни для каких $r, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(A3) очевидно.

(A4) $a \perp_d b \Rightarrow a = m^u, b = n^v, a \perp_d c \Rightarrow a = m^u, c = n^w$.

Тогда

$$b \cdot c = n^v \cdot n^w = n^{v+w} \Rightarrow a \perp_d (b \cdot c).$$

(A5) $a \perp_d b \Rightarrow a = m^u, b = n^v$,

$$b^{-1} = n^{-v} \Rightarrow a \perp_d b^{-1}.$$

Таким образом, отношение \perp_d – ортогональность в \mathbb{Q}_+ .

Пример 11. Пусть $m = 7, n = 8$. Заметим, что для любых $r, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ выполняется $m \neq n^{\frac{r}{k}}$.

$$\text{Тогда } 49 \perp_d \frac{1}{8}, 64 \perp_d \frac{1}{7}.$$

Литература

1. Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J.K., Tossavainen T. Perpendicularity in an Abelian Group // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2013. Vol. 13, Article ID 983607.
2. Davis G. Rings with orthogonality relation // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1971. Vol. 4. P. 163–178.
3. Векслер А.И. Linear spaces with disjoint elements and their conversion into vector lattices // Ленинградский государственный педагогический институт имени А.И. Герцена. Учёные Записки. 1967. Вып. 328. С. 19–43.
4. Eugeni F., Rizzi B. An incidence algebra on rational numbers // Rendiconti di Matematica. 1979. Vol. 12, № 3–4. P. 557–576.

О некоторых соотношениях кольца, влекущих его коммутативность

М.А. Зарубина

Томский государственный университет

E-mail: 1_cvetocheck@mail.ru

Рассматривается ряд соотношений и условий в кольце, влекущие его коммутативность. Приведены как некоторые классические, так и малоизвестные результаты.

Ключевые слова: кольцо, коммутативное кольцо, полугруппа, коммутаторы, идемпотенты.

Основой данной статьи являются книги [1, 2] и статья [3], из которой заимствованы идеи доказательств приведенных ниже теорем.

Начнем с хорошо известного факта.

Теорема 1. Всякое булево кольцо является коммутативным.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующий несложно проверяемый результат.

Теорема 2. Пусть R – кольцо, в котором из условия $xu = 0$, следует, что $ux = 0$. Тогда, если e – идемпотент в R , то e лежит в центре $Z(R)$ кольца R .

Теорема 3. Пусть R такое кольцо, что $(xy)^3 = xy$ для всех $x, y \in R$. Тогда R является коммутативным.

Доказательство. Полагая $x = y$, получим $x^6 = x^2$. Если $ux = 0$, то $x(yx)^2y = 0$, и $xy = (xy)^3 = 0$. Таким образом, по теореме 2 идемпотентные элементы кольца R являются центральными, и так как $((xy)^2)^2 = (xy)^2$, то имеем $(xy)^2 \in Z(R)$. Предположим, что $x = y$ и $y = x^4 \in Z(R)$. Тогда $(x^2 \cdot x)^3 = x^2 \cdot x$, отсюда $x^9 = x^3$ и $x^{12} = x^6 = x^2$. Таким образом, $x^{12} = x^4 = x^2$, поэтому $x^2 \in Z(R)$. Это означает, что $(xy)^2 = (yx)^2$, так как

$$\begin{aligned}(xy)^2 &= x(yxy) = x[(yx)^2 + y^2 - (yx - y)^2 - y^2x] = \\ &= [(yx)^2 + y^2 - (yx - y)^2 - y^2x]x = (yxy)x = (yx)^2.\end{aligned}$$

Затем $[x(x^2 + x)]^3 = x(x^2 + x)$ или $[x^3 + x^2]^3 = x^3 + x^2$, что дает $3x^8 + 3x^7 = 0$. Откуда $3x^2 + 3x^3 = 0$. В частности, $3(xy)^2 + 3(xy)^3 = 0$ и, так как $3(xy)^2 \in Z(R)$, мы приходим к выводу, что $3xy \in Z(R)$.

Теперь $[x(x + y)]^2 = [(x + y)x]^2$ или $(x^2 + xy)^2 = (x^2 + yx)^2$. Используя равенство $(xy)^2 = (yx)^2$ и центральность квадратов, получаем $2x^3y = 2yx^3$, откуда $2x^3 \in Z(R)$. Таким образом, $2xy = 2(xy)^3 \in Z(R)$.

Следовательно, $\exists xy \in Z(R)$. Откуда непосредственно следует, что $xy \in Z(R)$. Далее имеем

$$xy = (xy)^3 = x(yxy) = (yxy)x = (yx)^3 = yx,$$

что завершает доказательство.

Отметим, что существуют примеры некоммутативных колец, в которых для любых его элементов x, y, z выполняется соотношение $(xyz)^2 = xyz$.

Подобно теореме 3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. Если в кольце R для любого $x \in R$ выполняется условие $x^2 - x \in Z(R)$, то кольцо R коммутативно.

Идемпотентные элементы играют важную роль в теории колец, в связи с этим приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 5. В кольце R при выполнении хотя бы одного из условий:

а) $x^2 = 0$ влечет $x \in Z(R)$;

б) $xy \in Z(R)$ влечет $yx \in Z(R)$

все идемпотенты кольца R являются центральными.

Обобщением теоремы 3 служит следующая

Теорема 6. Кольцо R коммутативно тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

1) $x^3 - x \in Z(R)$;

2) $[x^3, y] = [x, y]$;

3) $[x, y]^3 = [x, y]$;

4) $[x^2, y] = [x, y]$.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 7. Если в кольце R для всех его элементов x, y, z коммутаторы $[x, z]$ и $[y, z]$ перестановочны, то $[x, y]^4 = 0$. В таком кольце коммутатор c удовлетворяет соотношению $c^n = c$ при $n > 1$ тогда и только тогда, когда $c = 0$.

Идеи доказательств предыдущих теорем можно использовать для проверки справедливости следующего результата.

Теорема 8. Если S – полугруппа, для всех $x, y \in S$ удовлетворяющая тождествам $x^3 = x$ и $x^2y = yx^2$, то S является коммутативной.

Приведем также следующие два классических результата, относящиеся к вопросу коммутативности кольца.

Теорема 9. (Веддербарна). Всякое конечное тело является полем.

Теорема 10. (Джекобсона). Пусть R – кольцо, в котором для любого $a \in R$ существует натуральное число $n(a) > 1$, такое, что $a^{n(a)} = a$. Тогда R будет коммутативным.

Отметим, что в статьях [4–7] рассматривались различные классы абелевых групп, кольца эндоморфизмов которых близки к коммутативным.

Литература

1. Херстейн И. Некоммутативные кольца / пер. с англ. ; предисл. Е.Н. Кузьмина. М. : Мир, 1972. 187 с.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М. : Физматлит, 2000. Ч. 3.
3. Stephen M., Desmond MacHale. Ring satisfying $x^3 = x$ are commutative // The mathematical association of America. 2013. P. 430–440.
4. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, вып. 4. С. 520–539.
5. Чехлов А.Р. Об абелевых группах, близких к E-разрешимым // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, вып. 8. С. 183–219.
6. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Матем. 2012. № 10. С. 60–73.
7. Чехлов А.Р. О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53, вып. 5. С. 1157–1165.

Геометрическое моделирование процесса обработки профильной фрезой деталей передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением

А.А. Костарев, Н.Р. Щербаков

Томский государственный университет

E-mail: artem_kost@bk.ru

Процесс формообразования поверхностей деталей в общей постановке исследуют примерно с середины двадцатого столетия [1]. Этот процесс зарождался и развивался параллельно с теорией инструмента. Проблема обработки (формообразования) поверхности детали передаточного механизма в самой общей постановке является задачей сближения двух поверхностей в пространстве. Создание нового вида зацеплений включает в себя процесс формообразования поверхностей контактирующих деталей.

Ключевые слова: *формообразование, эксцентриково-циклоидальное зацепление, сближение поверхностей, профильная фреза.*

В данной работе построена математическая модель поверхности профильной фрезы (как поверхности вращения) для обработки деталей цилиндрического механизма с эксцентриково-циклоидальным (ЭЦ) зацеплением [2]. Профильные фрезы позволяют вытачивать поверхность зуба «за один заход» в отличие от сферических и тороидальных фрез, обработка деталей которыми происходит последовательным вытачиванием координатных линий на поверхности детали [3, 4]. Стоимость специального профильного инструмента несколько выше, чем сферических и тороидальных фрез. Но увеличение стоимости инструмента окупается значительным сокращением машинного времени обработки деталей.

Основные задачи формообразования:

1. Из геометрического условия касания двух поверхностей в пространстве получить систему уравнений для определения местоположения фрезы в момент касания.

2. Найти аналитическое или численное решение этой системы.

3. Разработать комплекс специальных компьютерных программ управления движением фрезы, обрабатывающей деталь. Исходными данными являются параметры фрезы и изготавливаемых деталей. Программы обеспечивают нахождение констант, определяющих положение в пространстве центра фрезы, касающейся, в каждый момент времени, обрабатываемой детали.

Построение профильного инструмента:

Создаем сечения поверхности зуба, перпендикулярные оси фрезы (рис. 1) и в каждом сечении строим окружность, с центром на оси фрезы, касающуюся кривой, получившейся при пересечении профиля зуба плоскостью сечения (рис. 2).

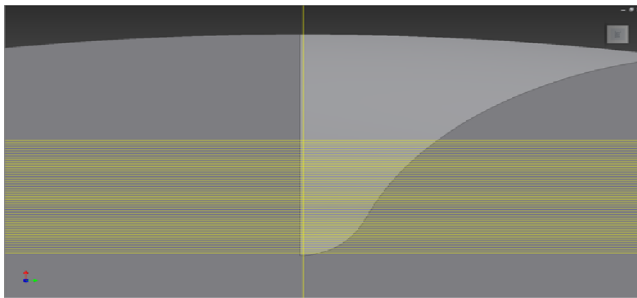


Рис. 1. Сечения поверхности зуба выходной детали, перпендикулярные оси фрезы

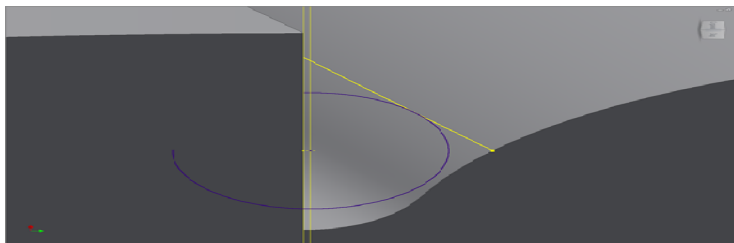


Рис. 2. Окружность с центром на оси фрезы, касающаяся кривой, получившейся при пересечении профиля зуба плоскостью сечения

Таким образом, получаем набор окружностей и по этому набору получаем тело инструмента как поверхность вращения (рис. 3).

В работе получены параметрические уравнения семейства окружностей в плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрезы с центрами, лежащими на этой оси. Эти окружности в каждой плоскости сечения находятся из условия касания их с плоской кривой – сечением зуба этой плоскостью. Это семейство окружностей и образует поверхность профильной фрезы для входной и выходной детали (соответственно: шестерня и колесо).

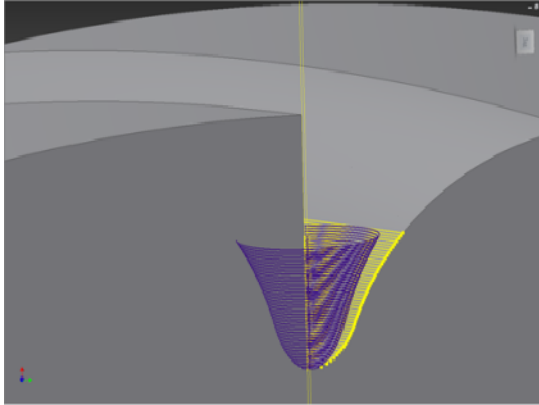


Рис. 3. Поверхность профильной фрезы для обработки выходной детали

Выпишем *константы*, входящие в уравнения поверхности профильной фрезы:

A_w – межцентровое расстояние;

ΔA_w – увеличение межцентрового расстояния;

r_c – радиус цилиндра для обрезания зубьев шестерни;

z_1 – количество зубьев шестерни;

z_2 – количество зубьев колеса;

$$n = \frac{z_2}{z_1} + 1;$$

μ – высота подъема сечения поверхности зуба детали;

K – количество сечений;

ε – эксцентриситет;

l – размер деталей по оси вращения;

ρ – радиус окружности сечения зуба шестерни;

r_i – радиусы окружностей сечения фрезы, для различных значений μ_i ;

η – сдвиг оси фрезы;

$E(\tau)_0$, $E(\tau)_1$ – координаты вектор-функции, задающей эквидистанту эпитрохоиды (профиль зуба колеса).

Входная деталь.

Поверхность зуба шестерни задается в виде вектор-функции двух аргументов:

$$\vec{S}(\nu, \alpha) = \begin{pmatrix} Aw + \Delta Aw - \varepsilon \cos \nu + \rho \cos(\alpha) \\ -\varepsilon \sin \nu + \rho \sin(\alpha) \\ \frac{lr \nu z_1}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Семейство сечений зуба шестерни плоскостями, перпендикулярными оси фрезы:

$$\vec{Sems}(\alpha, \mu) = \vec{S}(\nu_\alpha(\alpha, \mu), \alpha), \text{ где}$$

$$\nu_\alpha(\alpha, \mu) = \frac{-\pi}{z_1} + \arccos \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi + \alpha z_1}{z_1} \right) \rho + r_c + \mu}{\varepsilon} \right).$$

Уравнения поверхности профильной фрезы, для обработки зубьев входной детали:

$$\vec{F}(\alpha, i) = \begin{pmatrix} -\cos \left(\frac{\pi}{z_1} \right) r_c - \cos \left(\frac{\pi}{z_1} \right) \mu_i + \sin \left(\frac{\pi}{z_1} \right) (r_i \cos(\alpha) + \eta) + Aw + \Delta Aw \\ \sin \left(\frac{\pi}{z_1} \right) r_c + \sin \left(\frac{\pi}{z_1} \right) \mu_i + \cos \left(\frac{\pi}{z_1} \right) (r_i \cos(\alpha) + \eta) \\ r_i \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

где $\mu_i = \frac{\mu m}{K} i$; $i = 0 \dots K$; μm – максимальная высота сечения.

Выходная деталь.

Профиль зуба колеса – эквидистанта эпитрохоиды [5]:

$$\vec{E}(\tau) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos(\tau) + Aw \cos \left(\frac{\tau}{n} \right) \\ -\varepsilon \sin(\tau) + Aw \sin \left(\frac{\tau}{n} \right) \end{pmatrix} + \frac{\rho \begin{pmatrix} \varepsilon \cos(\tau) - \frac{Aw}{n} \cos \left(\frac{\tau}{n} \right) \\ \varepsilon \sin(\tau) - \frac{Aw}{n} \sin \left(\frac{\tau}{n} \right) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \varepsilon \cos(\tau) - \frac{Aw}{n} \cos \left(\frac{\tau}{n} \right) \\ \varepsilon \sin(\tau) - \frac{Aw}{n} \sin \left(\frac{\tau}{n} \right) \end{pmatrix}}.$$

Семейство сечений зуба колеса плоскостями, перпендикулярными оси фрезы:

$$\vec{Sems}(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_0 + \mu \\ -\sin\left(\frac{\tau_s(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_0 + \cos\left(\frac{\tau_s(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_1 \\ \frac{1}{2}lr(\tau_s(\tau, \mu))\frac{z_1}{\pi} \end{pmatrix},$$

где $\tau_s(\tau, \mu) = (n-1) \arctg\left(\frac{E(\tau)_0 [E(\tau)_1 (E(0)_0 + \mu) + Ed(\tau, \mu)]}{E(\tau)_0^2 (E(0)_0 + \mu) - E(\tau)_1 Ed(\tau, \mu)}\right),$

$$Ed(\tau, \mu) = \sqrt{-E(\tau)_0^2 ((E(0)_0 + \mu)^2 - E(\tau)_0^2 - E(\tau)_1^2)}.$$

Уравнения поверхности профильной фрезы, для обработки зубьев выходной детали (рис. 4):

$$\vec{F}(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_0 + \mu_i \\ r_i \cos(\alpha) + \eta \\ r_i \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

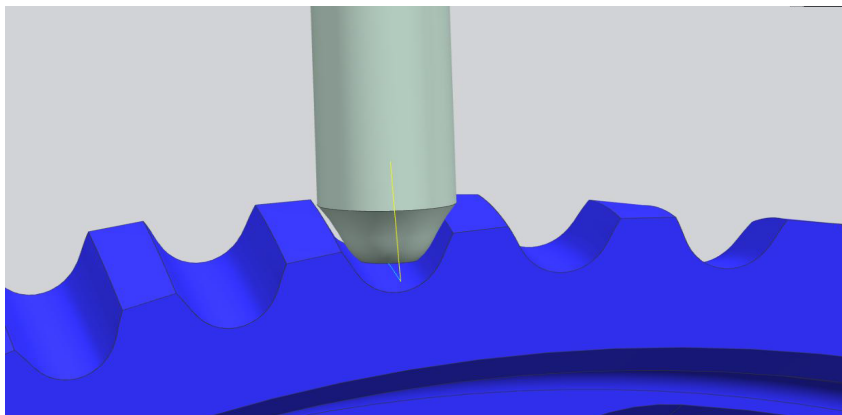


Рис. 4. Движение профильного инструмента при чистовой обработке колеса

Литература

1. Радзевич С.П. Формообразование поверхностей деталей. Киев : Ростан, 2001. 591 с.
2. Stanovskoy V.V., Kazakavitschjus S.M., Remnawa T.A., Kuznetzov W.M., Bubentschikov A.M., Scherbakov N.R. Eine neue Art des Zahneingriffes mit krummlinigen Zähnen // Antriebstechnik. 2009. № 11. S. 78–83.
3. Камчатный С.А., Сковородин А.В., Становской А.В., Щербаков Н.Р. Математическое моделирование процесса сближения поверхностей при формообразовании деталей передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2012. № 4 (20). С. 15–24.
4. Камчатный С.А., Кузнецов В.М., Сковородин А.В., Щербаков Н.Р. Математическое моделирование процесса формообразования деталей конического передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2014. № 2(28). С. 5–17.
5. Савелов А.А. Плоские кривые. М. : ГИФМЛ, 1960. С. 118.

Расстояние до алгебраической поверхности (на примере эллипсоида)

К.Е. Курганков

Томский государственный университет

E-mail: kastetkos@mail.ru

Рассматривается практика конструирования рефлекторных антенн и алгоритмы расчетов характеристик.

Ключевые слова: рефлекторная антенна, алгоритм.

Теория и практика конструирования рефлекторных антенн (как правило, орбитального размещения) зачастую требует надежной оценки расстояний от некоторых узлов и агрегатов спутника до поверхности рефлектора. В достаточно несложном случае задача сводится к оценке расстояния от точки до рефлектора.

Источник, указанный в списке литературы, содержит описание алгоритма, позволяющего (кроме прочего) вычислить расстояние от заданной точки до заданной квадрики в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Наша задача – составить Maple-программу [1], реализующую указанный алгоритм для сравнительно несложного случая: расстояние от точки до эллипсоида в \mathbb{R}^3 . Maple-программа применена для конкретного эллипсоида и конкретной точки. Результат допускает визуализацию.

Эллипсоид задаем уравнением так, что слагаемое нулевой степени равно 1.

$$\frac{7}{18}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{5}{18}x_3^2 - \frac{2}{9}x_1x_2 - \frac{2}{9}x_2x_3 - \frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{9}x_2 + \frac{5}{18}x_3 - 1 = 0. \quad (1)$$

Точка $O(0,0,0)$.

Значение функции в левой части уравнения

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{7}{18}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{5}{18}x_3^2 - \frac{2}{9}x_1x_2 - \frac{2}{9}x_2x_3 - \frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{9}x_2 + \frac{5}{18}x_3 - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

в точке O равно 1.

Объекты, с которыми мы имеем дело, представлены на следующем рисунке.

Нам потребуется матрица Гессе для нашей функции (она составляется из частных производных второго порядка функции $f(x_1, x_2, x_3)$).

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

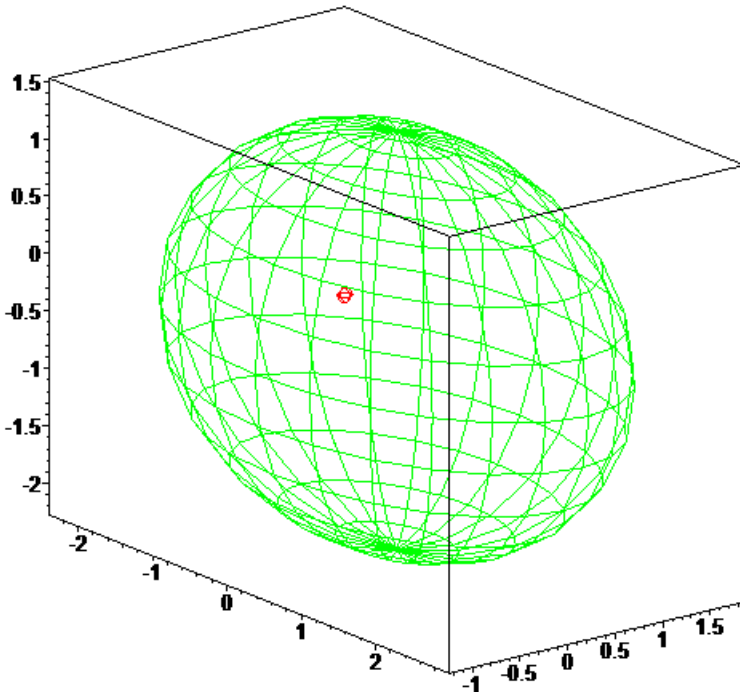


Рис. 1. Эллипсоид и точка O

Оставив в (2) только слагаемые не выше первой степени, получаем выражение

$$b = -\frac{x_1}{6} - \frac{2x_2}{9} + \frac{5}{18}x_3 - 1. \quad (4)$$

Характеристический полином матрицы A имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} \frac{7}{18} - \mu & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} - \mu & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{5}{18} - \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{36} - \frac{11}{36}\mu + \mu^2 - \mu^3. \quad (5)$$

Взаимная матрица матрицы Q

$$q = \begin{pmatrix} \frac{13}{162} - \frac{11}{18}\mu + \mu^2 & \frac{5}{162} - \frac{\mu}{9} & \frac{1}{81} \\ \frac{5}{162} - \frac{\mu}{9} & \left(\frac{7}{18} - \mu\right)\left(\frac{5}{18} - \mu\right) & \frac{7}{162} - \frac{\mu}{9} \\ \frac{1}{81} & \frac{7}{162} - \frac{\mu}{9} & \frac{19}{162} - \frac{13}{18}\mu + \mu^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Агрегат, нужный для дальнейшего

$$GG = \left(\frac{1}{36} - \frac{11\mu}{36} + \mu^2 - \mu^3\right)(\mu z - 1) - \left[\frac{31}{17496} - \frac{49}{2916}\mu + \frac{17}{648}\mu^2 + \frac{\left(\frac{7}{18} - \mu\right)\left(\frac{5}{18} - \mu\right)}{81} \right],$$

или в развернутой записи

$$GG = \frac{\mu z - 1}{36} - \frac{11}{36}\mu^2 z + \frac{11}{36}\mu + \mu^3 z - \mu^2 - \mu^4 z + \mu^3 - \left[\frac{163}{52488} - \frac{73}{2916}\mu + \frac{25}{648}\mu^2 \right]. \quad (7)$$

Для дальнейшего потребуется и следующее выражение:

$$G1 = \left(\frac{1}{36} - \frac{11}{36}\mu + \mu^2 - \mu^3\right)(\mu z - 1). \quad (8)$$

Также потребуется и матрица типа (1,1). Её единственный элемент

$$G2[1,1] = \frac{163}{52488} - \frac{73}{2916}\mu + \frac{25}{648}\mu^2. \quad (9)$$

Напомним, что характеристический полином имеет вид

$$z = \frac{1}{36} - \frac{11}{36}\mu + \mu^2 - \mu^3.$$

Величину $G1 - G2[1,1]$ обозначим

$$G = \frac{\mu z}{36} - \frac{1621}{52488} - \frac{11}{36}\mu^2 z + \frac{241}{729}\mu + \mu^3 z - \frac{673}{648}\mu^2 - \mu^4 z + \mu^3.$$

Вычисляем дискриминант многочлена G по переменной μ , то есть результат многочлена G и его производной по μ .

$$\begin{aligned} DIS = & \frac{1}{15116544}z^6 - \frac{36827}{22039921152}z^5 + \frac{14470657}{892616806656}z^4 - \\ & - \frac{43882396481}{578415690713088}z^3 + \frac{12872761609}{72301961339136}z^2 - \\ & - \frac{38915968609}{192805230237696}z + \frac{104728729}{1190155742208} \end{aligned}$$

Вещественные корни дискриминанта таковы:

$$1.39469, 5.70181, 7.04394, 7.59006.$$

Квадрат расстояния r от заданной точки до эллипсоида равен наименьшему положительному вещественному корню дискриминанта. В нашем случае

$$r = 1.39469.$$

Сфера S с центром $(0,0,0)$ и квадратом радиуса r касается нашего эллипсоида. Её уравнение

$$S: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.39469 = 0. \quad (10)$$

Требование пересечения сферы и эллипсоида приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & -\frac{11}{18}x_1^2 - \frac{2}{3}x_2^2 - \frac{13}{18}x_3^2 - \frac{2}{9}x_1x_2 - \\ & - \frac{2}{9}x_2x_3 - \frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{9}x_2 + \frac{5}{18}x_3 + 0.39469 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Точка касания сферы и эллипсоида

$$Y(-0.102469, -0.186420, 0.220988).$$

Рисунок 2 есть рисунок 1, дополненный сферой радиуса \sqrt{r} с центром в точке $O(0,0,0)$, точкой касания сферы и эллипсоида, а также отрезком, соединяющим центр сферы с точкой касания.

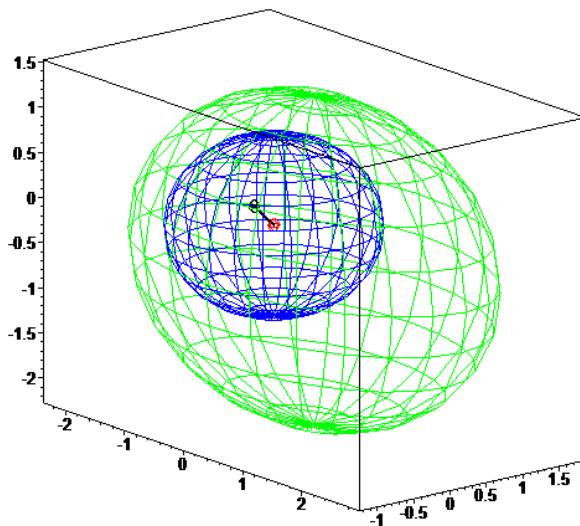


Рис. 2. Эллипсоид, точка O и точка касания сферы с центром O с эллипсоидом

Литература

1. Дьяконов В.П. Maple 6 : учебный курс. СПб. : Питер, 2001.
2. Вычисление расстояний между геометрическими объектам. URL: <http://pmpu.ru/vf4/algebra2/optimiz/distance>

Полюсное эксцентриково-циклоидальное зацепление в конической передаче

А.А. Щёголева, Н.Р. Щербаков

Томский государственный университет
E-mail: Nschegoleva@sibmail.com

Рассматривается зацепление колес, меньшее из которых имеет один зуб в форме винтового эксцентрика. Приводятся соотношения для моделирования и построения зацеплений.

Ключевые слова: колесо, зацепления.

В 2007 г. Томские конструкторы предложили принципиально новую разработку эксцентриково-циклоидального (ЭЦ) зацепления [1], на основе которого проектируются и изготавливаются цилиндрические, планетарные и конические ЭЦ-редукторы, а также реечные ЭЦ-передачи для механизмов с прямолинейным перемещением.

Предложено

Профиль зуба в торцовом сечении представляет собой окружность, эксцентрично смещенную относительно оси колеса. Профиль зуба большего колеса в торцовом сечении представляет собой циклоидальную кривую.

Полюсом в теории передаточных механизмов называют точку, которая делит расстояние между центрами колес в отношении, равном передаточному отношению.

Как видно из рисунка 1, в цилиндрическом зацеплении значения эксцентриситета e и диаметра сечения зуба шестерни d для заданного значения угла зацепления αk должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$e = Rk \cdot \cos(\alpha k), \quad d = 2 \cdot \left(\sqrt{Rk^2 - e^2} \right), \quad (1)$$

где Rk обозначено расстояние от центра сечения шестерни до полюса.

Конической называется зубчатая передача, предназначенная для передачи и преобразования вращательного движения между звеньями, оси вращения которых пересекаются под прямым углом или, что встречается реже, под острым, или тупым углом (рис. 2).

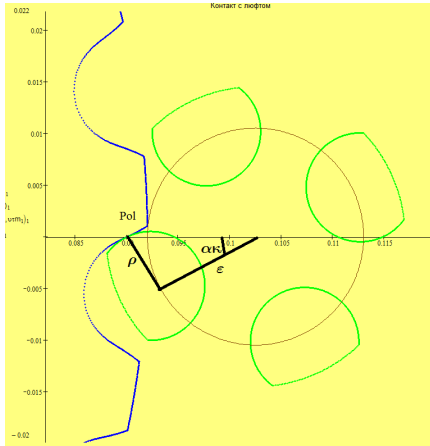


Рис. 1. Полос на ЭЦ зацепление для цилиндрической передачи.
Общая нормаль к профилям колес пересекает прямую, соединяющую центры профилей, в полюсе (Pol)



Рис. 2. Коническая передача с ЭЦ-зацеплением шестерни (вверху) и колеса (внизу)

В реальном зубчатом ЭЦ-зацеплении должен быть технологический зазор, который достигается путем увеличения межосевого расстояния на величину Dd , при этом линейный контакт преобразуется в точечный. Для конического передаточного механизма этот зазор определяется углом ψ между осью шестерни и осью OX

$$\psi = \arcsin\left(\frac{Dd}{2 \cdot R}\right),$$

где через R обозначен радиус сферы, на которой лежит циклоидальная кривая – профиль зуба колеса.

Полус конического ЭЦ-зацепления находится на окружности пересечения сферы с плоскостью XOZ и имеет следующие координаты

$$\vec{Pol} = \begin{pmatrix} \sqrt{R^2 - z_n^2} \\ 0 \\ -z_n \end{pmatrix},$$

где

$$z_n = |R \cdot \cos(\arctg(n))|$$

(через n обозначено передаточное отношение).

Для конического зацепления соотношения (1) дадут приблизительные значения эксцентриситета e и диаметра сечения зуба шестерни d для заданного значения угла зацепления αk , если в эти соотношения вместо Rk подставить

$$Rk = \left| \vec{Pol} - Q\psi \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Здесь через $Q\psi$ обозначена матрица поворота оси шестерни на величину зазора.

На рис. 3 изображена точка контакта в полюсе (Pol) для конического передаточного механизма. Эта точка делит дугу окружности AB в передаточном отношении.

При совпадении точки контакта с полюсом зацепления обеспечивается режим качения профилей без проскальзывания и минимизация потерь на трение. В [2] указан алгоритм определения параметров зацепления, при которых возможно совпадение точки контакта деталей цилиндрической передачи с полюсом. В данной работе построена математическая модель конической передачи с полюсным ЭЦ-зацеплением. Рассмотрена ситуация наличия технологического зазора, получены аналитические условия совпадения точки контакта профилей зубьев с полюсом. Созда-

ны компьютерные программы для нахождения углов доворота деталей до контакта в полюсе и координат точек контакта на профилях деталей.

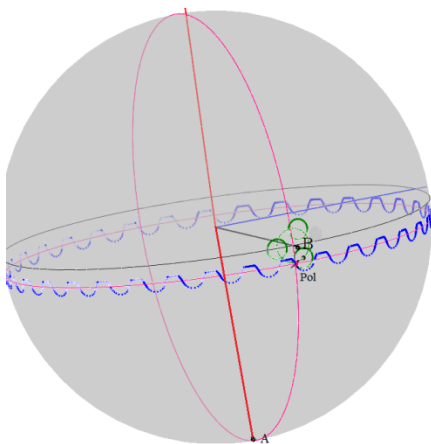


Рис. 3. Положение точки контакта в полюсе
ЭЦ-зацеплении конического передаточного механизма

Литература

1. Становской В.В., Казакиявичюс С.М., Ремнёва Т.А., Кузнецов В.М., Бубенчиков А.М., Щербаков Н.Р. Новый вид зацепления колёс с криволинейными зубьями // Справочник. Инженерный журнал. 2008. № 9 (138). С. 34–39.
2. Становской В.В., Казакиявичюс С.М., Щербаков Н.Р. Полосный контакт в эксцентриково-циклоидальном (ЭЦ) зацеплении // Теория и практика зубчатых передач : сб. трудов международного симпозиума (21–24 января 2014 г., Россия, Ижевск). Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2013. С. 220–226.

Исследование полей температуры в пламени с применением методов ИК-диагностики

М.В. Агафонцев, Е.Л. Лобода

Томский государственный университет
E-mail: kim75mva@gmail.com

При изучении процессов горения важную роль играет определение температуры в пламени. Современное развитие в области ИК-диагностики позволяет использовать тепловизоры для измерения температуры различных объектов. Они позволяют получить поле температуры с хорошим разрешением по пространству и времени.

Целью исследования было определение полей температуры и пульсаций температуры в пламени. Эксперимент состоял из двух этапов. На первом этапе производились съемки процесса горения исследуемого материала и АЧТ с помощью спектрографа и делался анализ спектров изменения поля температуры при горении различных горючих материалов. По результатам анализа спектра излучения пламени делался выбор узкого спектрального интервала. На втором этапе производилась съемка процесса горения с помощью тепловизора в выбранных спектральных диапазонах. В результате корректировки эффективного коэффициента излучения пламени по данным с термопарных измерений получалось поле температуры пламени. С помощью быстрого преобразования Фурье, были получены спектры изменения температуры в пламени для различных горючих материалов. Анализируя полученные зависимости, были установлены характерные частоты изменения температуры: для растительных горючих материалов частотные максимумы от 2 до 7 Гц; для жидких топлив частотные максимумы от 4 до 8 Гц; для спирта частотный максимум 16 Гц. Очевидно, что эти частоты связаны с движением и размерами температурных неоднородностей в пламени, которые обусловлены режимом горения и турбулентным характером течения в пламени.

Ключевые слова: температура, пламя, ИК-излучение, ИК-камера, ИК-диагностика, спектр.

Перед проведением эксперимента по исследованию полей температуры в пламени был выполнен дополнительный эксперимент по определению спектра излучения пламени. Производилась съемка процесса горения исследуемого материала с помощью спектрографа. Затем производилась съемка спектра излучения АЧТ при средней температуре в пламени. Полученные спектры сравнивались и анализировались, в результате чего было определено, что для исследования полей температуры в пламени наиболее пригодны спектральные интервалы 2,5–2,7 мкм и 2,64–3,25 мкм. В представленной работе рассматриваются результаты измерений, полученные в этих спектральных интервалах. В области исследования процессов горения и, в частности, природных пожаров [1–3] использование методов ИК-диагностики мало распространено ввиду сложности

исследуемого объекта и недостатка знаний о его свойствах, например, о величине коэффициента излучения ($\epsilon\lambda$) [4] и дороговизны специальных тепловизоров, пригодных для научных исследований. Тем не менее, данный способ определения характеристик фронта горения является перспективным. Например, можно отметить работы [5–7], где рассматривается измерение параметров лесного пожара в среднем ИК-диапазоне длин волн, а также работы [8–10], где приведены результаты исследований для спектральных интервалов 7,5–13 мкм и 8–12 мкм соответственно.

На рисунке 1 приведена схема экспериментальной установки, где источники излучения и регистрирующая аппаратура находятся на одной оптической оси.

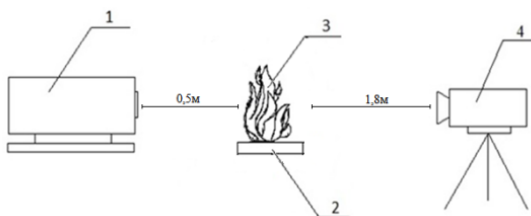


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 – модель АЧТ-45/100/1100; 2 – слой горючих материалов (ГМ);
3 – пламя фронта горения ГМ; 4 – тепловизор JADE J530SB

В качестве модели АЧТ использовался излучатель АЧТ-45/100/1100 производства ОАО НПП «Эталон» с диапазоном изменения температуры от 573 К до 1373 К. В качестве горючего материала (ГМ) рассматривались: древесина березы, хвоя сосны, дизельное топливо. Длина, высота слоя растительных горючих материалов (РГМ) варьировались, а масса изменялась в пределах $m = (50–200)$ г. Учитывались влагосодержание, масса горючего материала. Масса жидкого топлива варьировалась: $m = (20–50)$ г. Учитывались температура воздуха, относительная влажность и атмосферное давление. Температура воздуха варьировалась в пределах $T_e = (288–293)$ К. Относительная влажность воздуха изменялась в пределах $\varphi = (20–35)\%$, атмосферное давление $P_e = (9,94 \cdot 10^4 – 1,02 \cdot 10^5)$ Па. Дополнительно температура в пламени на оси АЧТ измерялась при помощи термопар типа ВР (вольфрам-рений) с диаметром сая 50 мкм и постоянной времени (инерционность) ϵ от 0,09 до 0,11 с.

В результате эксперимента получены термограммы процессов горения РГМ и спирта соответственно (рис. 2).

Для определения спектров изменения температуры в пламени использовали следующую методику: выбирали 20 контрольных точек, лежащих на одной вертикальной линии, причем интервал между ними выбирали таким образом, чтобы наиболее максимально охватить общий временной интервал процесса. Далее, получали таблицу температур для каждой контрольной точки. Затем используя быстрое преобразование Фурье, получали спектры изменения температур, которые усреднялись для снижения шумов.

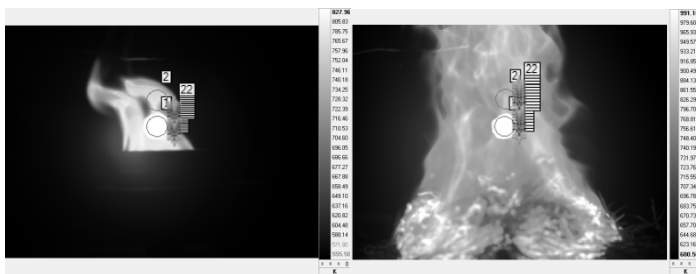


Рис. 2. Термограмма процесса горения РГМ и спирта

В результате обработки были получены следующие частотно-амплитудные спектры изменения температуры в пламени для различных видов ГМ.

На рисунке 3 изображены спектры изменения температуры в пламени при горении древесины березы в спектральных интервалах 2,5–2,7 мкм и 2,64–3,25 мкм.

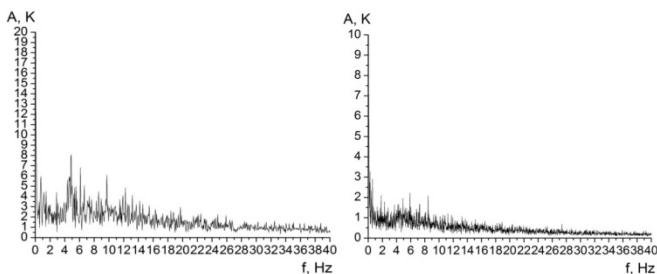


Рис. 3. Спектры изменения температуры пламени при горении древесины березы в спектральных интервалах 2,5–2,7 мкм и 2,64–3,25 мкм соответственно

На спектрах видно, что присутствуют выраженные колебания в диапазоне 2–7 Гц. На интервале 2,64–3,25 мкм амплитуды колебаний значи-

тельно меньше, чем на 2,5–2,7 мкм, из чего можно сделать вывод о важности выбора спектрального интервала для получения хорошо детализированного поля температуры. На спектрах, полученных для других ГМ, имеет место аналогичная тенденция.

На рис. 4 изображены спектры изменения температуры пламени при горении хвой сосны в спектральных интервалах 2,5–2,7 мкм и 2,64–3,25 мкм.

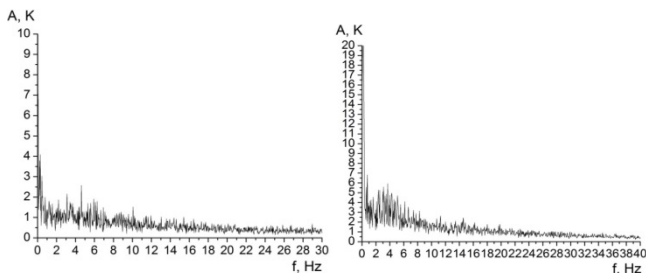


Рис. 4. Спектры изменения температуры пламени при горении хвой сосны в спектральных интервалах 2,5–2,7 мкм и 2,64–3,25 мкм соответственно

Для древесины березы наблюдается аналогичная картина. На представленных спектрах видно, что присутствуют выраженные колебания в промежутке 2–7 Гц, однако амплитуды спектров для хвой сосны и древесины различаются вследствие различий в структуре и составе материалов.

На рис. 5 изображены спектры изменения температуры пламени при горении дизельного топлива в спектральных интервалах 2,5–2,7 мкм и 2,64–3,25 мкм.

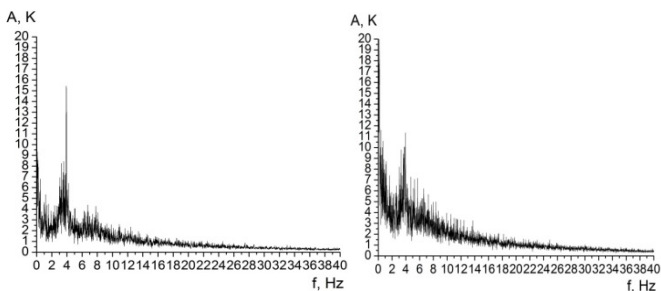


Рис. 5. Спектры изменения температуры пламени при горении дизельного топлива в спектральных интервалах 2,5–2,7 мкм и 2,64–3,25 мкм соответственно

В отличие от предыдущих спектров для РГМ, в случае дизельного топлива присутствуют выраженные колебания в промежутке 4–8 Гц, причем наиболее ярко выражена частота 3–4 Гц. Все выраженные частоты обу-

словлены процессами, протекающими при горении. На термограммах рисунка 2 видно, что в пламени присутствуют температурные неоднородности, движение которых обусловлено режимом течения в пламени и определяет пульсации температуры, обнаруживаемые в спектрах.

В результате проведенных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- температура в пламени многократно изменяется во времени;
- в спектре температуры пламени, образующемся при горении ГМ, присутствуют характерные частотные максимумы в диапазоне от 2 до 7 Гц, для дизельного топлива – от 4 до 8 Гц;
- пульсации температуры в пламени связаны с режимом течения в пламени и наличием турбулентности (масштабами турбулентности).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых № МД-5754.2015.1 и гранта РФФИ № 15-01-00513_a.

Литература

1. Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые методы борьбы с ними. Новосибирск : Наука, 1992. 407 с.
2. Гришин А.М. Моделирование и прогноз катастроф. Томск : Изд-во ТГУ, 2003. Ч. 1. 524 с.
3. Гришин А.М., Долгов А.А., Рейно В.В., Цвык Р.Ш. Спектры излучения при горении лесных материалов // Лесные и степные пожары: возникновение, распространение тушение и экологические последствия : матер. Междунар. конф. Иркутск, 2001. С. 58–62.
4. Рейно В.В., Шерстобитов М.В. Влияние коэффициента излучения пламени и выбор спектрального диапазона при регистрации ИК-изображений очагов горения // Математическое моделирование опасных природных явлений и катастроф : матер. 7-й междунар. конф. Томск: Томский гос. ун-т, 2008. С. 97–98.
5. Boulet P., Pareut G., Acem Z., Collin A., Sero-Guillaume O. On the emission of radiation by flames and corresponding absorption by vegetation in forest fires // Fire Safety Journal. 2011. № 46. P. 21–26.
6. Qian C., Saito K. Measurements of Pool-Fire Temperature Using IR Technique, Combustion Institute / Central and Western States (USA) and Combustion Institute / Mexican National Section and American Flame Research Committee. Combustion Fundamentals and Applications. Joint Technical Meeting. Proceedings. April 23–26, 1995, San Antonio, TX, Gore, J. P., Editor(s). P. 81–86.
7. Rinieri F., Balbi J.-H., Santoni P.-A. On the use of an infra-red camera for the measurement of temperature in fires of vegetative fuels. QIRT. 2006. URL: <http://qirt.gel.ulaval.ca/archives/qirt2006/papers/011.pdf> (дата обращения: 04.10.2013).
8. Dupuy P., Vachet J., Maréchal J., Meléndez A.J. de Castro. Thermal infrared emission-transmission measurements in flames from a cylindrical forest fuel burner // International Journal of Wildland Fire. 2007. № 16. P. 324–340.
9. Tadashi Konishi, Akihiko Ito, Kozo Saito. Transient Infrared Temperature Measurements of Liquid-Fuel Surfaces: Results of Studies of Flames Spread Over Liquids. 2000. Appl. Opt. 39, P. 4278–4283.
10. Meléndez J., Aranda J.M., de Castro A.J., López F. Transient Infrared Temperature Measurements of Liquid-Fuel Surfaces: Results of Studies of Flames Spread over Liquids // Quantitative InfraRed Thermography Journal. 2006. V. 3, iss. 2. P. 183–199.

Численный анализ сопряженного конвективного теплообмена в полости с пористой вставкой

Д.А. Кожевников, М.А. Шерemet

Томский государственный университет
E-mail: den_linad@mail.ru

Проведено математическое моделирование нестационарного сопряженного конвективного теплообмена в прямоугольной полости с пористой вставкой. Краевая задача, сформулированная в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность скорости – температура», была реализована численно методом конечных разностей. Получены поля скорости и температуры, отражающие влияние времени на структуру течения и теплоперенос.

Ключевые слова: конвекция, теплопроводность, пористый слой, прямоугольная полость, функция тока, математическое моделирование.

Введение

В настоящее время для оптимизации систем охлаждения элементов энергетического оборудования все чаще используют тепловые трубы [1, 2]. Впервые идея тепловой трубы была предложена Гоглером в 1942 году, но только с 1964 года после более детального описания в статье Гровера [3] была подвергнута тщательным исследованиям. Тепловая труба по конструкции аналогична термосифону, но в тепловой трубе на внутренней стенке укреплен пористый фитиль, сделанный, например, из нескольких слоев тонкой сетки. Принцип работы тепловой трубы [1–5] заключается в следующем: в трубу с пористым фитилем на внутренней поверхности помещается небольшое количество теплоносителя, например вода, затем из трубы откачивается воздух, и она плотно закрывается. Один конец трубы нагревается, что вызывает испарение жидкости и движение пара к холодному концу трубы, где он конденсируется. Конденсат под действием капиллярных сил, в отличие от гравитационных сил в термосифоне, возвращается к горячему концу. Так как скрытая энергия парообразования велика, то даже при очень малой разности температур между концами теплообменника он может передавать значительное количество теплоты. Преимущество тепловой трубы перед термосифоном состоит в отсутствии ограничений на расположение испарителя. Таким образом, рассматриваемое теплообменное устройство может работать при любой ориентации.

В настоящее время проведено большое количество теоретических и экспериментальных исследований процессов переноса массы, импульса и энергии в тепловых трубах различной конфигурации [1, 5–10]. Внимание главным образом уделяется практической разработке теплообменного устройства с учетом теоретического, преимущественно, балансового описания изменения давления, температуры и других определяемых физических параметров.

Так, например, исследование влияния внешних факторов (ориентация тепловой трубы, температура конденсатора и условия теплообмена устройства с окружающей средой) было детально проведено на примере медь-водяной контурной тепловой трубы, используемой для охлаждения теплонагруженных элементов современных серверных систем [6]. Было установлено, что при температуре конденсатора от 60°C и выше контурная тепловая труба функционирует при любом угле наклона. При этом зависимость интенсивности теплопереноса от угла наклона уменьшается, когда температура конденсатора достигает значения 60°C и выше. Теоретический анализ гидродинамики и теплопереноса в тепловой трубе проведен в [7]. Влияние гидравлического диаметра парового канала и длины испарителя на гидродинамику и режимы теплопереноса было проанализировано на основе гидродинамической модели, предложенной в [8], а анализ теплового состояния проведен путем декомпозиции тепловой трубы на три зоны со своими термическими сопротивлениями. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными показало хорошую точность разработанных моделей. Подробный литературный обзор, посвященный существующим стационарным математическим моделям тепломассопереноса в контурных тепловых трубах, представлен в [9]. Описанные математические модели были разбиты на три группы: вычислительные модели для всего устройства, вычислительные модели для испарителя и аналитические модели. Проведенный обзор показал наличие большого количества балансовых аналитических моделей, а также неполных вычислительных моделей. Также было отмечено появление трехмерных численных расчетов транспортных процессов в тепловых трубах [10].

В последние годы отмечается повышенный интерес к использованию наножидкостей (смесь чистой жидкости и наночастиц высокотеплопроводного материала) в качестве рабочей среды в различного рода теплообменных аппаратах [11, 12], в том числе и в тепловых трубах. Анализ особенностей гидродинамики и теплопереноса в тепловых трубах, в которых в качестве рабочей среды используется наножидкость, проведен в [13]. Отмечается, что введение наночастиц в рабочую жидкость тепловых

труб различной модификации может существенно интенсифицировать процесс теплопереноса, снизить тепловое сопротивление. В настоящее время такие исследования являются неполными и требуют более детального анализа, главным образом на основе многопараметрических математических моделей.

Проведенный обзор показал, что большая часть работ посвящена анализу процессов переноса тепла и массы в тепловых трубах различного типа на основе экспериментальной проработки с использованием некоторых аналитических выражений, полученных из балансовых соотношений. Полное математическое моделирование с учетом процессов конвективного, кондуктивного и радиационного теплопереноса в условиях испарения и конденсации в двумерной и трехмерной постановках отсутствует. В случае же использования наножидкостей такой анализ также не проводился.

Целью настоящей работы является математическое моделирование нестационарных режимов конвекции в замкнутой полости с теплопроводной оболочкой и при наличии пористой вставки.

Математическая модель

Рассматривается краевая сопряженная задача нестационарного ламинарного теплопереноса в замкнутой прямоугольной области, представленной на рис. 1.

Область решения представляет собой фитильную тепловую трубу плоского типа, состоящую из парового канала (1 на рис. 1), пористого фитиля (2 на рис. 1) и твердой оболочки конечной толщины и теплопроводности (3 на рис. 1). Левая часть теплообменника контактирует с охлаждаемым элементом, температура которого постоянна и максимальна T_h , а правая часть связана с циркулирующим охладителем, где учитывается конвективный теплообмен с этой средой. Остальные внешние стенки считаются теплоизолированными.

Предполагается, что теплофизические свойства материала стенок, пара и жидкости не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Пар считается вязкой, теплопроводной, ньютоновской несжимаемой жидкостью. Движение жидкости и пара, а также теплоотдача во внутренней области принимаются плоскими, теплообмен излучением между стенками – пренебрежимо мал по сравнению с конвективным теплообменом. Предполагается также, что размер по третьей координате много больше двух других и краевые эффекты течения и теплообмена пренебрежимо малы, поэтому рассматривается двумерная постановка задачи.

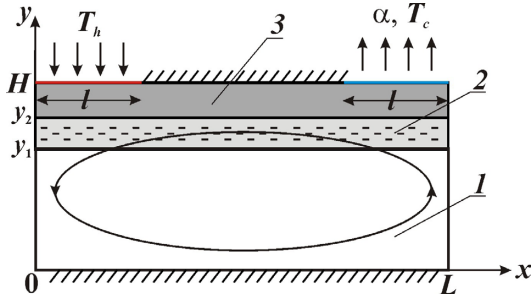


Рис. 1. Область решения задачи: 1 – паровой канал; 2 – пористый фитиль; 3 – твердая стенка

Решение уравнений тепломассопереноса будет проводиться с использованием безразмерных переменных: функция тока Ψ ($V_x = \partial\Psi/\partial y$, $V_y = -\partial\Psi/\partial x$) и завихренность скорости $\omega = \partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y$.

Безразмерные уравнения примут следующий вид [14]:
в паровом канале (1 на рис. 1)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right), \quad (3)$$

в пористом фитиле (2 на рис. 1)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{U}{\varepsilon} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{V}{\varepsilon} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{\nu_{2,1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} - \frac{\varepsilon}{\text{Da}} \Omega \right), \quad (5)$$

$$\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{a_{2,1}}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right), \quad (6)$$

в твердой оболочке теплообменника (3 на рис. 1)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a_{3,1}}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right). \quad (7)$$

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (1)–(7) имеют вид, подробно представленный в [1, 2, 9, 10].

Уравнения (1)–(7) решались конечно-разностным методом [14–16] на равномерной сетке с использованием неявной двухслойной схемы. Для аппроксимации конвективных слагаемых применялась схема второго порядка точности, позволяющая учесть знак скорости, для диффузионных слагаемых – центральные разности. Уравнения параболического типа решались на основе локально одномерной схемы А.А. Самарского. Полученные, в результате дискретизации дифференциальной задачи, разностные уравнения разрешались методом прогонки. Аппроксимация уравнения Пуассона для функции тока проводилась с помощью пятиточечного шаблона «крест». Полученное разностное уравнение было решено методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

Разработанный метод решения был тщательно протестирован на серии модельных задач [14–16].

Результаты численного моделирования

Численные исследования сформулированной краевой задачи проведены при рассмотрении плоской тепловой трубы (материал стенок – медь), рабочая среда – вода и водяной пар. Основное внимание уделялось анализу влияния фактора нестационарности.

На рис. 2 представлены распределения изолиний функции тока и температуры в случае медной тепловой трубы в различные моменты времени.

Типичные термогидродинамические структуры на начальном временном этапе, формирующиеся в тепловой трубе плоского типа, изображены на данном рисунке. Вследствие работы тепловыделяющего элемента, который в настоящей постановке рассматривался на основе граничных условий первого рода, наблюдается перенос энергии через оболочку тепловой трубы за счет теплопроводности. Необходимо отметить, что в пра-

вой части анализируемого объекта также вследствие теплопроводности наблюдается охлаждение оболочки за счет условий конвективного теплообмена со стороны внешнего теплоносителя. Поле скорости в рассматриваемый момент времени отражает зарождение двух рециркуляционных течений с ядрами на границах раздела пористого фитиля и парового канала в зонах испарения и конденсации.

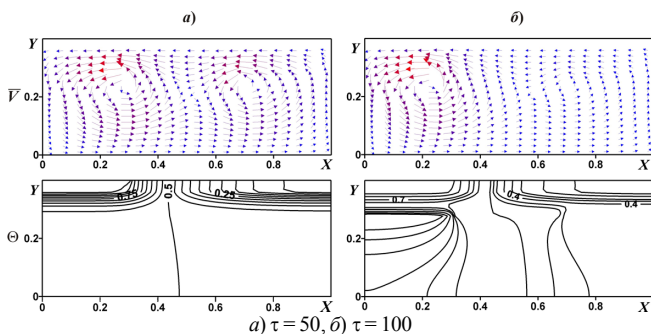


Рис. 2. Поля скорости и температуры в различные моменты времени в случае медной оболочки теплообменника

Следует отметить, что данные вихри слабоинтенсивные вследствие малого перепада давления в начальный момент времени. Рост времени (рис. 2, б) приводит к существенной модификации, как поля скорости, так и поля температуры. Зона испарения жидкости отражает наличие температурной неоднородности в малой по толщине области. После этого, вследствие увеличения перепада давления между зонами испарения и конденсации, происходит интенсивное перемещение пара к правой части теплообменника с последующей конденсацией и передачей энергии через твердую оболочку внешнему теплоносителю. Такая интенсификация движения паровой фазы проявляется в диссипации правого вихря.

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Минобрнауки России (задание № 13.1919.2014/К).

Литература

1. Reay D.A., Kew P.A. Heat pipes. Theory, Design and Applications. L. : Elsevier, 2006. 397 p.
2. Дан П.Д., Рей Д.А. Тепловые трубы. М. : Энергия, 1979. 272 с.
3. Grover G.M., Cotter T.P., Erickson G.F. Structures of very high thermal conductance // Journal of Applied Physics. 1964. Vol. 35. P. 1990–1991.

4. Васильев Л.Л., Гракович Л.П., Хрусталеv Д.К. Тепловые трубы в системах с возобновляемыми источниками энергии. Минск : Наука и техника, 1988. 159 с.
5. Maydanik Yu.F. Loop heat pipes // *Applied Thermal Engineering*. 2005. Vol. 25. P. 635–657.
6. Chernysheva M.A., Yushakova S.I., Maydanik Y.F. Effect of external factors on the operating characteristics of a copper–water loop heat pipe // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. Vol. 81. P. 297–304.
7. Paiva K.V., Mantelli M.B.H. Theoretical thermal study of wire-plate mini heat pipes // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. Vol. 83. P. 146–163.
8. Paiva K.V., Mantelli M.B.H., Slongo L.K. Thermal behavior analysis of a wire mini heat pipe // *ASME J. Heat Transfer*. 2011. Vol. 133. P. 121502-1–121502-9.
9. Siedel B., Sartre V., Lefevre F. Literature review: Steady-state modelling of loop heat pipes // *Applied Thermal Engineering*. 2015. Vol. 75. P. 709–723.
10. Li J., Peterson G. 3D heat transfer analysis in a loop heat pipe evaporator with a fully saturated wick // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011. Vol. 54. P. 564–574.
11. Sheremet M.A., Pop I. Conjugate natural convection in a square porous cavity filled by a nanofluid using Buongiorno’s mathematical model // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2014. Vol. 79. P. 137–145.
12. Sheremet M.A., Grosan T., Pop I. Free convection in a square cavity filled with a porous medium saturated by nanofluid using Tiwari and Das’ nanofluid model // *Transport in Porous Media*. 2015. Vol. 106. P. 595–610.
13. Alawi O.A., Sidik N.A.C., Mohammed H.A., Syahrullail S. Fluid flow and heat transfer characteristics of nanofluids in heat pipes: A review // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2014. Vol. 56. P. 50–62.
14. Sheremet M.A., Trifonova T.A. Unsteady conjugate natural convection in a vertical cylinder containing a horizontal porous layer: Darcy model and Brinkman-extended Darcy model // *Transport in Porous Media*. 2014. Vol. 101. P. 437–463.
15. Шеремет М.А. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения. Берлин : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 176 с.
16. Sheremet M.A., Trifonova T.A. Unsteady conjugate natural convection in a vertical cylinder partially filled with a porous medium // *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 2013. Vol. 64, № 12. P. 994–1015.

Исследование режимов смешанной конвекции в прямоугольной полости при наличии изотермической стенки

И.И. Носонов, М.А. Шермет

Томский государственный университет
E-mail: nosonov_94@mail.ru

Проведен численный анализ нестационарных режимов смешанной конвекции в прямоугольном канале с изотермической стенкой. Краевая задача, сформулированная в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность скорости – температура» в приближении Буссинеска, была реализована численно методом конечных разностей. Установлено влияние числа Ричардсона, высоты стенки и времени на среднее число Нуссельта на поверхности изотермического участка.

Ключевые слова: смешанная конвекция, изотермическая стенка, функция тока, математическое моделирование.

Введение

Изучение нестационарных режимов конвективного теплопереноса в полукрытых областях имеет фундаментальное и прикладное значение. На практике очень часто при оптимизации существующих и создании новых энергетических систем одним из определяющих механизмов переноса энергии является конвекция [1]. Детальное исследование гидродинамических и тепловых особенностей данного вида теплопереноса позволяет ответить на многие вопросы, возникающие при изучении объектов любых масштабов: от микроскопических – в порах и полостях строительных материалов и конструкций, до масштабов Земли – задачи геофизики. Необходимо отметить, что при изучении режимов смешанной конвекции в отличие от вынужденной, течение возникает не только под действием внешнего потока, но и при наличии внутреннего температурного напора в поле действия силы тяжести [2]. Поэтому процессы передачи тепла и течение жидкости в таком режиме конвекции неразрывно связаны друг с другом и их нельзя рассматривать независимо.

В настоящее время проведено небольшое количество теоретических и экспериментальных исследований смешанного конвективного теплопереноса в замкнутых и полукрытых областях при наличии локальных источников тепловыделения [1, 3–6]. Так, анализ режимов смешанной конвекции в частично открытых пространственных полостях с внутрен-

ними источниками тепла проведен в [3]. Результаты показали существование двух различных механизмов, которые определяют формирование рециркулирующей внутри полости. Первый механизм обусловлен гидродинамическими особенностями смешанной конвекции и доминирует, когда силы инерции преобладают над силами плавучести. Второй механизм связан с переносом энергии внутри полости и развивается, когда тепловыделение от источника способно преодолеть вынужденное течение, вследствие формирования выталкивающей силы. Результаты также показали сильную трехмерную природу течения внутри полости, что указывает на необходимость использования пространственных моделей при изучении подобных процессов. Численное исследование смешанной конвекции наножидкости, представляющей собой смесь воды с наночастицами меди, в Т-образной полости в присутствии однородного магнитного поля проведено в [4]. Дифференциальные транспортные уравнения, описывающие анализируемый процесс, решены методом контрольного объема с применением SIMPLE-алгоритма. В результате установлены распределения скорости и температуры внутри полости в зависимости от значений определяющих параметров – числа Рейнольдса, Ричардсона, Гартмана, геометрический параметр. Показано, что при низких значениях числа Рейнольдса среднее число Нуссельта незначительно увеличивается с ростом интенсивности магнитного поля. Однако при высоких значениях Re темпы роста среднего числа Нуссельта с ростом числа Гартмана становятся более заметными.

Целью настоящей работы является математическое моделирование нестационарных режимов смешанной конвекции в полуоткрытой полости при наличии изотермической стенки.

Математическая модель

Ньютоновская несжимаемая жидкость поступает в прямоугольную полость через входное отверстие с постоянной температурой охлаждения T_c и постоянной горизонтальной скоростью u_{in} . Все поверхности открытой полости являются адиабатическими за исключением вертикальной стенки входного уступа, на которой поддерживается постоянная температура нагрева T_h . Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси y (рис. 1).

При численном моделировании будем рассматривать случай квадратной области ($L = H$). Дифференциальные уравнения, описывающие анализируемый процесс в приближении Буссинеска в размерных переменных «скорость–давление», имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_c), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

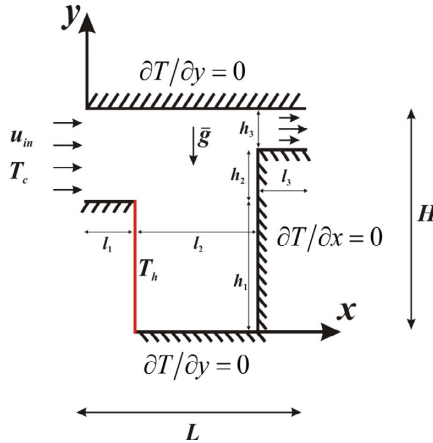


Рис. 1. Область решения задачи

Далее вводим функцию тока ψ и завихренность скорости ω следующим образом $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\omega = \text{rot}_z \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, и безразмериваем уравнения (1)–(4), где в качестве масштаба длины выберем L , масштаб скорости – u_{in} , масштаб времени – L/u_{in} , масштаб функции тока – $u_{in}L$, масштаб завихренности – u_{in}/L , а безразмерную температуру введем следующим образом: $\Theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$. Тогда математическая постановка

смешанной конвекции вязкой несжимаемой жидкости для рассматриваемой области в безразмерных переменных примет вид [7]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (7)$$

Здесь $\text{Re} = u_{in} L / \nu$ – число Рейнольдса, $\text{Pr} = \nu / a$ – число Прандтля, $\text{Ri} = \text{Ra} / (\text{Pr} \cdot \text{Re}^2)$ – число Ричардсона, $\text{Ra} = g \beta \Delta T L^3 / \nu a$ – число Рэлея.

Безразмерные граничные условия для предложенной системы уравнений (5)–(7) имеют вид:

$$\begin{aligned} X=0, \quad h_1/L \leq Y \leq 1, \quad \Psi = Y - h_1/L, \quad \Omega = 0, \quad \Theta = 0; \\ X=l_1/L, \quad 0 \leq Y \leq h_1/L, \quad \Psi = 0, \quad \partial \Psi / \partial X = 0, \quad \Theta = 1; \\ X=(l_1+l_2)/L, \quad 0 \leq Y \leq (h_1+h_2)/L, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0; \\ X=1, \quad (h_1+h_2)/L \leq Y \leq 1, \quad \partial \Psi / \partial X = 0, \quad \partial \Omega / \partial X = 0, \quad \partial \Theta / \partial X = 0; \\ Y=0, \quad l_1/L \leq X \leq (l_1+l_2)/L, \quad \Psi = 0, \quad \partial \Psi / \partial Y = 0, \quad \partial \Theta / \partial Y = 0; \\ Y=h_1/L, \quad 0 \leq X \leq l_1/L, \quad \Psi = 0, \quad \partial \Psi / \partial Y = 0, \quad \partial \Theta / \partial Y = 0; \\ Y=(h_1+h_2)/L, \quad (l_1+l_2)/L \leq X \leq 1, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0; \\ Y=1, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad \Psi = 1 - h_1/L, \quad \partial \Psi / \partial Y = 0, \quad \partial \Theta / \partial Y = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Сформулированная краевая задача для дифференциальных уравнений (5)–(8) решена методом конечных разностей [7–10] на равномерной сетке. Уравнения решались последовательно, каждый временной шаг начинался с определения функции (5) тока внутри полости, затем решались уравнение дисперсии завихренности (6) и уравнение энергии (7). Значения завихренности скорости на поверхностях стенок полости определялись на основе формулы Вудса [7–10]. Для численного решения уравнений параболического типа (6) и (7) применялась локально одномерная схема Самарского, позволяющая плоскую задачу свести к системе одномерных. Для аппроксимации конвективных слагаемых использовалась монотонная схема Самарского, для диффузионных слагаемых – центральные разности. Эволюционный член представлял собой односторон-

ную разность по времени и имел первый порядок точности относительно шага по времени. Все производные по пространственным координатам аппроксимировались со вторым порядком точности относительно шага по координате. Дискретизация уравнения Пуассона для функции тока (5) проводилась на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученное разностное уравнение разрешалось методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

Разработанный метод решения также был протестирован на множестве сеток. На рисунке 2 представлены распределения температуры в вертикальном сечении $X = 0,3$ в зависимости от размерности разностной сетки при $Ra = 7,1 \cdot 10^5$, $Pr = 0,7$.

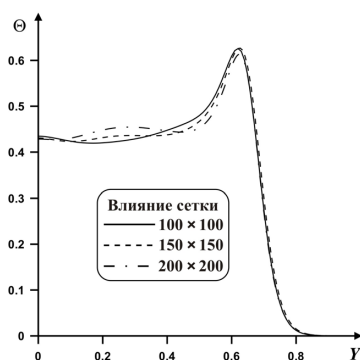


Рис. 2. Влияние сеточных параметров на профили температуры в сечении $X = 0,3$

Поскольку уменьшение шага разностной сетки отражается на повышении времени счета, то для дальнейшего анализа была выбрана разностная сетка размерности 150×150 с целью оптимизации точности вычислений и времени расчета.

Результаты численного моделирования

Численный анализ проведен при следующих значениях безразмерных комплексов, характеризующих режимы конвективного теплопереноса: $Ri = 0,1-100$; $Pr = 0,71$; $h_2/L = 0,1-0,3$; $0 \leq \tau \leq 100$.

На рис. 3 представлены распределения среднего числа Нуссельта на поверхности изотермической стенки $\left(Nu_{\text{avg}} = \frac{L}{h_1} \int_0^{h_1/L} \left(-\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_{X=h_1/L} dY \right)$ в зависимости от числа Ричардсона, времени и относительной высоты правого уступа. Увеличение температурного напора, которое отражается в росте числа Рэлея, а соответственно и в повышении числа Ричардсона, проявляется в увеличении интенсивности теплообмена на поверхности изотермического участка. В свою очередь изменение высоты правого уступа приводит к незначительному снижению интенсивности теплообмена с поверхности нагреваемого элемента. Наблюдаемый эффект обусловлен несущественным ростом размеров рециркуляционной зоны, которая не позволяет значительно снизить температуру среды при ее перемещении от тепловыделяющего элемента к противоположной стенке и обратно.

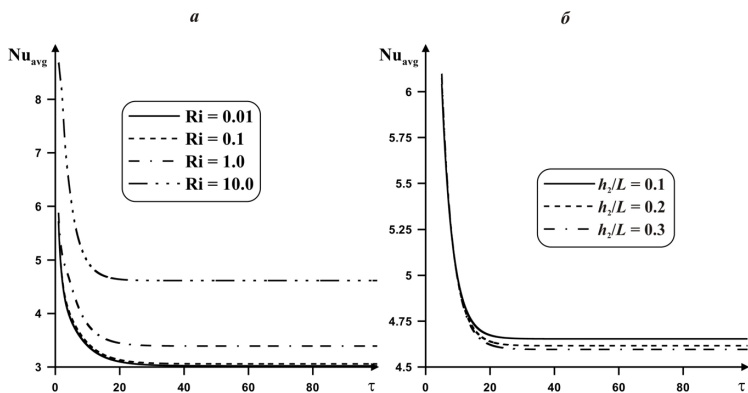


Рис. 3. Влияние числа Ричардсона (а) и безразмерной высоты правого уступа (б) на временные зависимости среднего числа Нуссельта

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Минобрнауки России (задание № 13.1919.2014/К).

Литература

1. Jaluria Y. Design and Optimization of Thermal Systems. N. Y. : McGraw-Hill, 1998. 626 p.
2. Джалаурия Й. Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. М. : Мир, 1983. 400 с.
3. Fontana E., Capeletto C.A., da Silva A., Mariani V.C. Numerical analysis of mixed convection in partially open cavities heated from below // Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. Vol. 81. P. 829–845.

4. Kasaeipoor A. Ghasemi B. Aminossadati S.M. Convection of Cu-water nanofluid in a vented T-shaped cavity in the presence of magnetic field // *Int. J. Thermal Sciences*. 2015. Vol. 94. P. 50–60.
5. Ермолаев И.А., Жбанов А.И., Кошелев В.С. Смешанная конвекция при слабом внешнем течении в вертикальном канале с источником тепла конечных размеров // *Теплофизика высоких температур*. 2008. Т. 46, № 5. С. 717–722.
6. Ермолаев И.А., Жбанов А.И. Смешанная конвекция в вертикальном канале с дискретными источниками тепла на стенке // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2009. № 4. С. 40–46.
7. Kuznetsov G.V., Sheremet M.A. Numerical simulation of convective heat transfer modes in a rectangular area with a heat source and conducting walls // *ASME. Journal of Heat Transfer*. 2010. Vol. 132, iss. 8. P. 1–9.
8. Шеремет М.А. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения. Берлин : LAMBERT Academic Publishing, 2011. 176 с.
9. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М. : Наука, 1984. 288 с.
10. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М. : Мир, 1980. 616 с.

Некоторые свойства отображений на области с симметриями

Е.М. Бакчанина

Томский государственный университет
E-mail: bak70rus@yandex.ru

Рассматриваются свойства отображений на области с симметриями. Приводятся основные формулировки и теоремы.

Ключевые слова: отображения, симметрия.

Определение. Область D комплексной w -плоскости будем называть областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если $D = L(D)$, где $L(w) = w + T$, $T > 0$.

Любая область D с симметрией переноса вдоль вещественной оси является неограниченной и конечной, односвязной или бесконечносвязной. Будем рассматривать односвязные области.

Бесконечно-удаленная точка может быть телом одного или многих простых концов границы области D . При преобразованиях

$L(w) = w + T$ области D возможны только два варианта: в точке $w = \infty$ среди всех простых концов неподвижными могут быть либо один простой конец, либо два простых конца.

Определение. Если в бесконечно-удаленной точке один неподвижный простой конец, то область D будем называть типа полуплоскости (рис. 1).

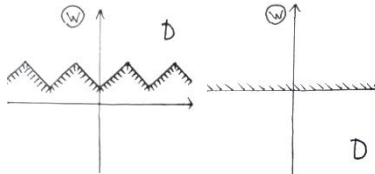


Рис. 1

Определение. Если в бесконечно-удаленной точке два неподвижных простых конца, то область D будем называть типа полосы (рис. 2).

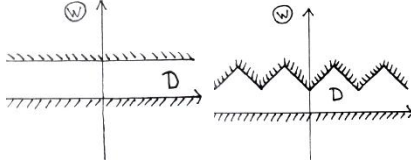


Рис. 2

Определение. Отображение. $f: \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}_w$, где $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}: \text{Im } z > 0\}$ – верхняя комплексная полуплоскость, будем называть отображением с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если $f(\Pi^+) = D$, где D – область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на T .

Отображение f с симметрией переноса вдоль вещественной оси обладает свойством.

Теорема. Для каждого отображения f с симметрией переноса вдоль вещественной оси на T существует вещественное число $t, t > 0$, такое, что $f(z + kt) = f(z) + kT, k \in \mathbb{Z}$.

Для отображения f с симметрией переноса вдоль вещественной оси предел $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} f(z)$, равномерный относительно $\text{Re } z \in \mathbb{R}$, существует тогда и только тогда, когда существует равномерный относительно $\text{Re } z \in [a, a + t], a \in \mathbb{R}$, предел $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} f(z)$. Будем обозначать этот предел $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} f(z)$.

Теорема. Пусть однолиственное, голоморфное отображение $f: \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}_w, f(\Pi^+) = D$, где D – область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на T , удовлетворяет условиям:

- 1) $f(z + kt) = f(z) + kT, k \in \mathbb{Z}, t > 0, T > 0;$
- 2) $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z) - \lambda z) = 0, \lambda > 0.$

Тогда $T = \lambda t$.

Доказательство.

Возьмем точку $z \in \Pi^+$ и рассмотрим точку $(z + t) \in \Pi^+$. Если $f(z) \in D$, то $f(z + t) = f(z) + T \in D$ (рис. 3).

Рассмотрим предел $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z + t) - \lambda(z + t))$.

В силу первого условия теоремы

$$\begin{aligned} \lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z + t) - \lambda(z + t)) &= \lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z) + T - \lambda(z + t)) = \\ &= \lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} ((f(z) - \lambda z) + T - \lambda t). \end{aligned}$$

В силу второго условия теоремы

$$\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z + t) - \lambda(z + t)) = T - \lambda t = 0.$$

Следовательно, $T = \lambda t$.

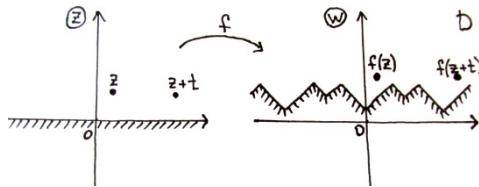


Рис. 3

Определение. Область D комплексной плоскости будем называть областью с двойной симметрией, если она является

- 1) областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на T ;
- 2) областью с симметрией относительно прямой $\{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} w = \frac{T}{2}\}$.

Теорема. Пусть D – область с двойной симметрией. Тогда область D симметрична относительно любой прямой $\{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} w = k \frac{T}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

Доказательство.

Возьмем произвольную точку $w \in D$. Запишем ее в алгебраическом виде $w = u + iv$ (рис. 4).

Точка $w' = \frac{T}{2} + \left(\frac{T}{2} - u\right) + iv$ симметрична точке w относительно прямой $\{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} w = \frac{T}{2}\}$, следовательно, $w' \in D$.

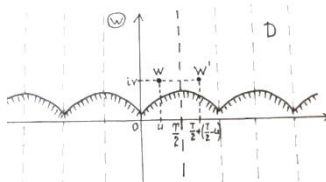


Рис. 4

Рассмотрим точку $w'' = k_0 \frac{T}{2} + \left(k_0 \frac{T}{2} - u\right) + iv$ симметричную точке w относительно прямой $\{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} w = k_0 \frac{T}{2}, k_0 \in \mathbb{Z}\}$ (рис. 5).

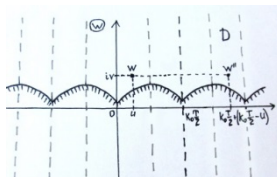


Рис. 5

Найдем расстояние между точками w'' и w' :

$$\begin{aligned}w'' - w' &= \left[k_0 \frac{T}{2} + \left(k_0 \frac{T}{2} - u \right) + iv \right] - \left[\frac{T}{2} + \left(\frac{T}{2} - u \right) + iv \right] = \\ &= k_0 T - u + iv - T + u - iv = (k_0 - 1)T.\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора k_0

$$w'' = w' + (k - 1)T, k \in \mathbb{Z}.$$

Точка w'' получена из точки w' переносом на $(k - 1)T$, т.е. $w'' \in D$.

Следовательно, область D симметрична относительно любой прямой $\{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} w = k \frac{T}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Литература

1. Александров И.А. Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Известия вузов. Математика. 1999. № 6(445). С. 15–18.
2. Александров И.А. Отображения на области с симметрией переноса // Международная конференция Всесибирские чтения по математике и механике: Избранные доклады. Т. 1: Математика. Томск: Изд-во Томского университета, 1997. С. 35–36.
3. Колесников И.А. Конформное отображение на область с двойной симметрией // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы XI международной Казанской летней научной школы-конференции. Т. 46: Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2013. С. 257–259.
4. Колесников И.А. Отображение с симметрией переноса // Комплексный анализ и приложения: материалы VI Петрозаводской международной конференции. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2012. С. 39–42.
5. Копанева Л.С. Области с симметрией переноса // Всесибирские чтения по математике и механике: тезисы докладов Международной конференции. 1997 г. Т. 1: Математика. Томск, 1997. С. 61.

Некоторые случаи интегрируемости уравнения типа Левнера

И.А. Мельникова

Томский государственный университет
E-mail:01021994@docsis.ru

Рассматриваются особенности интегрируемости уравнений типа Левнера.

Ключевые слова: интегрирование, уравнения.

Определение. Область D комплексной плоскости будем называть областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если $D = L(D)$, где $L(w) = w + T$, $T > 0$.

Каждая область D с симметрией переноса вдоль вещественной оси является неограниченной и конечной, а также либо односвязной, либо бесконечносвязной.

Бесконечно-удаленная точка может быть телом одного или многих простых концов границы области D . При преобразованиях $L(w) = w + T$ области D возможны только два варианта: в точке $w = \infty$ среди всех простых концов неподвижными могут быть либо один простой конец, либо два простых конца.

Определение. Если в бесконечно-удаленной точке один неподвижный простой конец, то область D будем называть областью типа полуплоскости.

Определение. Отображение $f: \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}_w$, где $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ – верхняя комплексная полуплоскость, будем называть отображением с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если $f(\Pi^+) = D$, где D – область симметрией переноса вдоль вещественной оси на T .

Определение. Множество всех голоморфных и однолистных в верхней полуплоскости отображений $f: \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}_w$, удовлетворяющих условиям:

1) область $f(\Pi^+) = D$ есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости;

2) $f(z + 2\pi k) = f(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $\lim_{\text{Im}z \rightarrow +\infty} (f(z) - z) = 0$, где $\text{Im}z > 0$,

будем называть классом $X_{2\pi}$.

Теорема. Пусть голоморфное и однолистное отображение $f: \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in X_{2\pi}$. Пусть $\partial f(\Pi^+) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k$, где γ_k есть попарно непересекающиеся простые кривые, уходящие на бесконечность. Тогда существует такое непрерывное вещественное отображение $\lambda: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda = \lambda(\tau)$, что

$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\zeta(\tau; z) - i\tau)$, где $\zeta(\tau; z)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\zeta(\tau; z)}{d\tau} = \operatorname{ctg} \frac{\lambda(\tau) - \zeta(\tau; z)}{2}$$

с начальным условием $\zeta(0; z) = z$.

Теорема. Пусть отображение $\lambda: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda = \lambda(\tau)$ непрерывно.

Тогда отображение $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\zeta(\tau; z) - i\tau)$, где $\zeta(\tau; z)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\zeta(\tau; z)}{d\tau} = \operatorname{ctg} \frac{\lambda(\tau) - \zeta(\tau; z)}{2}$$

с начальным условием $\zeta(0; z) = z$, принадлежит классу $X_{2\pi}$.

Уравнение

$$\frac{d\zeta(\tau; z)}{d\tau} = \operatorname{ctg} \frac{\lambda(\tau) - \zeta(\tau; z)}{2}$$

из этих теорем, следуя традициям, будем называть уравнением типа Левнера.

Решим уравнение типа Левнера при $\lambda(\tau) = \mu\tau$, $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \operatorname{ctg} \frac{\mu\tau - \zeta}{2}$$

с начальным условием $\zeta(0) = z$.

Выполним замену $\frac{\mu\tau - \zeta}{2} = u$ в уравнении.

Получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\sin u}{\mu \sin u - \cos u} du = \frac{1}{2} d\tau$$

с начальным условием $u(0) = -\frac{z}{2}$, общее решение которого даётся формулой:

$$\frac{1}{1 + \mu^2} \ln(\mu \sin u - \cos u) + \frac{\mu}{1 + \mu^2} u = \frac{\tau}{2} + \operatorname{const}.$$

С учётом начального условия находим, что

$$\operatorname{const} = \frac{1}{1 + \mu^2} \ln\left(-\mu \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2}\right) - \frac{\mu z}{2(1 + \mu^2)}.$$

Решение $\zeta(\tau) = \zeta(\tau; z)$ исходного уравнения неявно задано равенством

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \mu^2} \ln\left(\mu \sin \frac{\mu\tau - \zeta}{2} - \cos \frac{\mu\tau - \zeta}{2}\right) + \frac{\mu(\mu\tau - \zeta)}{2(1 + \mu^2)} = \\ & = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{1 + \mu^2} \ln\left(-\mu \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2}\right) - \frac{\mu z}{2(1 + \mu^2)}. \end{aligned}$$

В результате предельного перехода при $\tau \rightarrow +\infty$ получим отображение

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\zeta(\tau) - i\tau) = \frac{\mu}{\mu + i} z + \frac{2}{\mu + i} \ln \frac{1 + \mu i}{2(\mu \sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2})}.$$

При $\mu = 1$ задача рассмотрена в [2] и отображение

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z - \ln(1 + \sin z)) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - i\frac{\pi}{2})$ переводит верхнюю полуплоскость на плоскость с разрезами по параллельным лучам, выходящим из точек

$$w_k = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) + i \left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi k = A_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

под углом $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ к вещественной оси.

Литература

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М. : Наука, 1976. 344 с.
2. Копанева Л.С. Параметрическое представление отображений с симметрией переноса // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск, 2001. С. 135–144.

Выбор признаков при решении задачи кластеризации

Е.И. Амшарюк, О.П. Федорова

Томский государственный университет
E-mail: ekaterinaamsharyuk@gmail.com

Исследуется распределение признаков по коллекциям изображений. Сравняются результаты кластеризации методами Форель и К-средних.

Ключевые слова: кластеризация, дескрипторы цифровых изображений.

Обработка изображения – практически важная и актуальная проблема, включающая задачи построения баз видео изображений, организации поиска заданных фрагментов видео и изображений, что требует решения задач классификации, а также сравнения изображений и фрагментов видео. Такие задачи востребованы в медицине, геологии и других областях хозяйственной и научной деятельности.

Успешное решение задач обработки изображения связано с выбором эффективных признаков (дескрипторов), описывающих изображение, а также используемой моделью данных. Признаки можно разделить на группы, описывающие те или иные свойства изображения: цвет, текстуру, характерные (ключевые) точки, границы и др. Наиболее часто используемые признаки (дескрипторы) – это гистограммы, коэффициенты Фурье-спектра, вейвлет-разложения, а также семиинварианты двумерных функций [1].

Важное значение при выборе и обосновании методов решения задач играет, используемая модель данных. В данной работе рассматривается случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$, здесь ξ_i – некоторые характеристики пикселя. Так при использовании цветовой модели RGB, (аббревиатура английских слов Red, Green, Blue – красный, зелёный, синий – цветовая модель, описывающая способ синтеза цвета для цветовоспроизведения) компоненты вектора $\xi = (\xi_R, \xi_G, \xi_B)$, где ξ_R, ξ_G, ξ_B – значения яркости чистых цветов в точке [2].

Существует множество разных методов кластеризации цифровых изображений. В настоящей работе рассматриваются два из них, а именно метод FOREL [3] и К-средних [4], также проводится сравнительный анализ результатов этих методов. Основное отличие заключается в том, что в методе FOREL необходимо радиус сферы задать, при этом количество

классов получаются автоматически, в методе К-средних количество классов задается пользователем.

Для задач кластеризации встает вопрос о выборе признаков объектов. В настоящей работе в качестве таких признаков выбраны: 1) усредненные значения яркости RGB; 2) усредненные значения преобразования Фурье; 3) гистограммы. Ни маловажным фактором при решении таких задач является выбор расстояния между объектами. В работе [5] изучается применение евклидова расстояния $\rho_1(X_i, X_j) = [\sum_{p=1}^k (X_{ip} - X_{jp})^2]^{\frac{1}{2}}$ и расстояния супремум-норма $\rho_\infty(X_i, X_j) = \sup_{p=1\dots k} \{|X_{ip} - X_{jp}|\}$. Сравнение результатов кластеризации показывает, что задание евклидова расстояния или супремум-нормы на результаты кластеризации не влияет. Все выводы в данной статье получим с использованием евклидова расстояния. Известно, что для нормально распределенных значений признаков эффективность кластеризации повышается, если выбрать расстояние Махаланобиса. Для использования этого расстояния, вышеуказанные признаки подвергаются проверке на нормальность. В качестве объектов выступают коллекции гвоздик, а также машин и мотоциклов, которые созданы автором по материалам интернет-ресурса. Кластеризация проводится как над объектами одного цвета, так и над объектами разных цветов. Для проверки на нормальность, строится основная гипотеза H_0 .

H_0 : распределение признаков нормально. В таблице приведены значения p -уровня.

Результат проверки согласия

	F r	F g	F b	M r	M g	M b	M0 r	M0 g	M0 b
Гвоздики	0,46	0,48	0,7	0,53	0,21	0,1	0,56	0,66	0,89
Машины	0,46	0,41	0,44	0,3	0,85	0,68	0,17	0,35	0,25
Мотоциклы	0,132	0,15	0,02	0,76	0,5	0,006	0,016	0,07	0,00024

Примечание. F_r, F_g, F_b – усредненные преобразования Фурье по каналам RGB; M_r, M_g, M_b – усредненные значения яркости RGB с выкинутыми высокими и низкими уровнями яркости; M0_r, M0_g, M0_b – усредненные значения яркости RGB.

Проведенный анализ показывает, что все выбранные признаки при уровне значимости равном 0.1 имеют нормальное распределение, как в пространстве, так и в частотной области. Все это приводит к тому, что можно для данных коллекций использовать расстояние Махаланобиса [6].

На рис. 1 представлено признаковое пространство, в качестве признаков выбраны усредненные значения уровней яркости RGB для различных объектов: cars (машины), bikers (мотоциклы), carnations (гвоздики).

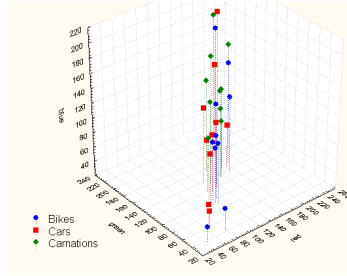


Рис. 1. Признаковое пространство

На рис. 2 представлено признаковое пространство, где в качестве признаков выбраны усредненные значения Фурье-спектра для преобразования Фурье уровней яркости по каналам RGB.

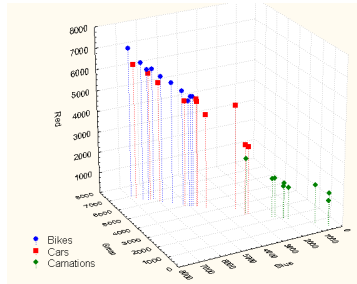


Рис. 2. Признаковое пространство

Стоит отметить, что метод FOREL лучше всего обнаруживает кластеры сферической формы. Из рисунка 2 можно сделать предположение, что благодаря коэффициентам Фурье-спектра, гвоздики попадут в один класс.

Результаты кластеризации методом FOREL подтверждают это предположение. При различных изменениях радиуса сферы, получено разное количество кластеров, но разбиение проводится таким образом, что в один класс попали только гвоздики, а в другой мотоциклы с машинами. Что не скажешь о методе К-средних. При задании пользователем количества классов равных трем, кластеризация проводится отлично. Только в том случае, когда пользователь задает два класса, этот метод классифицирует хуже метода FOREL.

Проводятся исследования, в которых изучается зависимость усредненной суммы квадратов расстояний между центрами кластеров $d_{эт} = \frac{\sum_{r=1}^q (x_r - \bar{x}_{эт})^2}{q-1}$ и усредненной суммы квадратов расстояний между объектами внутри кластеров $d_{эл} = \sum_i \sum_{x \in S_i} (x - x_i^{эт})^2 / n$ [5]. Оптимальный радиус соответствует наибольшему значению $d_{эт}$ и наименьшему значению $d_{эл}$.

Графиками $d_{эт}$ и $d_{эл}$ для коллекция объектов одного цвета являются следующие графики.

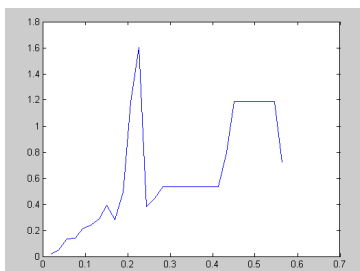


Рис. 3. Дисперсия между элементами в кластере

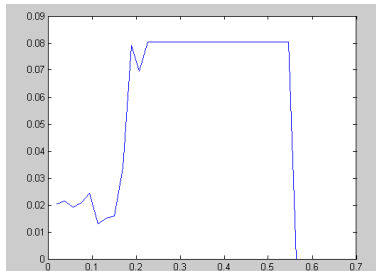


Рис. 4. Дисперсия между эталонами

Из рис. 3, 4 видно, что радиус при наименьшем значении $d_{эл}$ равен пример 0,17, и при наибольшем значении $d_{эл}$ равен 0,17. При запуске метода FOREL при радиусе равном 0,17, количество классов получается равным трем, как оно и должно быть.

Таким образом, построен вектор признаков, найден оптимальный радиус, построено предположение о виде расстояния, проведен сравнительный анализ результатов двух методов.

Литература

1. Кондратьев М.А. Разработка модели распространения инфекционных заболеваний на основе агентного подхода. 2013. URL: <http://netess.ru/3informatika/288479-1-razrabotka-modeli-rasprostraneniya-infekcionnih-zabolevaniy-osnove-agentnogo-podhoda.php> (дата обращения: 18.01.2014).
2. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М. : Техносфера, 2005. 1072 с.
3. Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск : ИМ СО РАН, 1999. 270 с.
4. Гончаров М. Кластерный анализ. URL: <http://www.businessdataanalytics.ru/ClusterAnalysis.htm> (дата обращения: 22.04.2014).
5. Амшарюк Е.И. Дипломная работа. Рукопись. Томск : ММФ ТГУ, 2014.
6. Горбунова И.В. Дипломная работа. Рукопись. Томск : ММФ ТГУ, 2001.

Численное решение дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с поглотителем

Д.А. Катеринский, С.А. Шульга

Томский государственный университет

E-mail: deniskaterinskiy@gmail.com

Получено численное решение дифференциального уравнения в частных производных для Американского пут опциона. В силу наложенных условий задачи ограничений, уравнение рассматривается и в своем исходном смысле, и как уравнение в частных производных параболического типа с поглотителем. Данный подход позволил найти дополнительные ограничения, способствующие построению решения задачи. По полученным теоретическим результатам написан эффективный программный модуль для решения поставленной задачи, который может использоваться как самостоятельно, так и служить основой библиотек.

Ключевые слова: модель Блэка-Шоулза, Американский пут опцион, уравнение теплопроводности, численное решение, схема Саульева.

Рассмотрим модель Блэка-Шоулза [3]:

$$\begin{aligned}dB_t &= rB_t dt, B_0 > 0, \\dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t), S_0 > 0.\end{aligned}$$

где B – безрисковый и S – рисковый активы с ценами соответственно B_t и S_t в момент времени $t \in [0, T]$, r – доходность безрискового актива, неслучайная постоянная величина, W_t – значение винеровского процесса, μ – доходность ценной бумаги S , σ – волатильность ценной бумаги S .

Пусть:

1. $t \in [0, T], S \in [0, \infty), \mu = 1$;
2. σ, E, r – некоторые константы, $\sigma \in [0, \infty), r \in [0, 1], E \in [0, \infty)$.

При данных предположениях из описанной выше модели Блэка-Шоулза следует уравнение (1) для Американского пут опциона:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (1)$$

Отметим, что модель Американского опциона в силу более простых расчетов (дата окончания опциона указана в договоре), нежели в модели Европейского опциона, является основной для повседневной практики расчета цены производных ценных бумаг.

На практике распространен метод расчета цены опциона через решение уравнения в частных производных (1), так как его вычисление проще, чем модели мартингала, служащие альтернативным решением для этой задачи.

В терминах уравнений математической физики, имеется уравнение в частных производных параболического типа – одна из разновидностей уравнения теплопроводности. Первые два слагаемых задают классическое уравнение теплопроводности, оставшиеся два – дрейф. Однако заметим, что первые три слагаемых задают уравнение теплопроводности для бесконечного цилиндра, поверхность которого нагрета с одной из его боковых половин; последнее слагаемое устанавливает дополнительный поглотитель, расположенный либо на его поверхности с нагретой стороны, либо вблизи нее.

Каждая реальная задача имеет систему ограничений, связанную с рассматриваемой ей предметной областью. Пусть для уравнения Американского пут опциона (1), заданы следующие начальные и граничные условия:

1. $V(0, S) = \max\{E - S, 0\}$;
2. $V(t, \infty) = 0$;
3. $V(t, 0) = Ee^{-rt}$.

В дополнение, для всех t выполняется следующее неравенство:

4. $V(t, S) \geq \max\{E - S, 0\}$.

В такой постановке задачи имеется ряд сложностей. Во-первых, задача не является классическим дифференциальным уравнением в частных производных и не сводится к канонической форме. Во-вторых, отсутствует правая граница в граничных условиях. В-третьих, наложено дополнительное условие, требующее дополнительной проверки на каждом шаге вычислений. В-четвертых, полученное решение должно быстро рассчитываться с помощью компьютерных программ.

Для решения данного уравнения используем метод конечных разностей. Это наиболее простой способ решения уравнений в частных производных, позволяющий при расчете значений легко проверять наложенное дополнительное условие. Кроме того, решение может быть оптимизировано для вычисления с помощью компьютерной программы.

Исходя из предметной области задачи, которая не требует высочайшей точности решения, и, заметив, что функция V убывает с ростом своих аргументов S и t , зададим допустимую погрешность $\varepsilon > 0$ на правой границе. Принимая во внимание замечание, относительно поглотителя, для задания условия останова на правой границе можно использовать квадрат заданной погрешности. В этом случае с высокой долей вероятности можно избежать выхода за границы установленной погрешности решения $\varepsilon > 0$ и необходимости возврата к предыдущим слоям для их пересчета.

Рассмотрим решение уравнения (1). В силу простоты и легкости реализации алгоритмов на компьютере, использование явных схем является наиболее предпочтительным. Однако попытки их применения для решения данного уравнения не приводят к успеху. Так, например, воспользовавшись спектральным условием Неймана [1], приходим к неравенству:

$$\frac{\Delta t \sigma^2 S^2}{(\Delta S)^2} < 1 \quad (2)$$

В силу наложенных в постановке задачи ограничений и негибкости выбора шагов по времени и координате, которые всегда связаны каким-либо соотношением, например, указанным выше (2), возможны два исхода – либо слишком маленький шаг сетки, следовательно, вычисления будут производиться крайне долго, либо неустойчивость решения.

Применим неявную схему. Большинство схем, в силу неопределенности правой границы, вызовут не только сложность программной реализации, но и излишнюю ресурсоемкость и невозможность оптимизации программного кода. В данном случае наиболее подходящей оказывается схема «бегущего счета», называемая схемой Саульева [2, 4]. Ее сеточный шаблон представлен на рис. 1.

Данная схема является абсолютно (безусловно) устойчивой при любых значениях параметров задачи. Основным же ее достоинством является двухэтапность, которая позволяет при «прямом» проходе следить за установленной погрешностью и отслеживать при «обратном» проходе накапливающуюся ошибку.

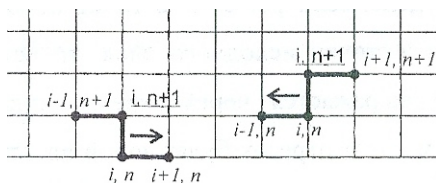


Рис. 1. Сеточный шаблон схемы Саульева

Построим разностную схему для уравнения (1), используя выбранный шаблон. Так как схема предполагает движение в двух направлениях, то, соответственно при движении слева-направо и справа-налево имеют место следующие равенства:

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{v_{i-1}^{n+1} - v_i^{n+1} - v_i^n + v_{i+1}^n}{\Delta S^2} + r S \frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i+1}^n}{2 \Delta S} - r V_i^n, \quad (3)$$

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{v_{i-1}^n - v_i^{n+1} - v_i^{n+1} + v_{i+1}^{n+1}}{\Delta S^2} + r S \frac{v_{i-1}^n - v_{i+1}^{n+1}}{2 \Delta S} - r V_i^n. \quad (4)$$

Произведя необходимые преобразования, из (3) и (4) получим итоговые формулы (5) и (6), соответственно при движении слева-направо и справа-налево, для вычисления значений в узлах сетки:

$$V_i^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2 S^2 \Delta t}{2\Delta S^2}} \times \left(\frac{\sigma^2 S^2 \Delta t}{2\Delta S^2} (V_{i-1}^{n+1} - V_i^n + V_{i+1}^n) + rS\Delta t \frac{V_{i-1}^{n+1} - V_{i+1}^n}{2\Delta S} - V_i^n (r\Delta t - 1) \right), \quad (5)$$

$$V_i^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2 S^2 \Delta t}{2\Delta S^2}} \times \left(\frac{\sigma^2 S^2 \Delta t}{2\Delta S^2} (V_{i-1}^n - V_i^n + V_{i+1}^{n+1}) + rS\Delta t \frac{V_{i-1}^n - V_{i+1}^{n+1}}{2\Delta S} - V_i^n (r\Delta t - 1) \right). \quad (6)$$

По результатам данного теоретического исследования разработан программный модуль, который может быть использован как самостоятельно, так и в составе более сложных систем.

Модуль протестирован по следующим параметрам: предельно достижимая точность вычислений, максимальные размерности получающихся в решении матриц, минимальный размер шага сетки.

Для проведения тестирования была построена площадка средней вычислительной мощности: использовано одно ядро процессора Intel Core i7 с тактовой частотой 2,93 ГГц и 4 ГБ оперативной памяти и 4 ГБ файла подкачки (swp-память). Замеры проводились в условиях стандартной работы 64-битной операционной системы Ubuntu 13.04.

В результате получено, что приложение, использующее данный библиотечный модуль, позволяет достигать точность вычислений 10^{-12} , которой вполне достаточно для возникающих расчетных задач для ценных бумаг.

В условиях ограничения используемой памяти, количество элементов получаемых матриц составляет около 10^9 (размерность матриц порядка $30\,000 \times 30\,000$).

В зависимости от входных параметров, шаг сетки может варьироваться в широком диапазоне. Использованная тестовая площадка позволила достичь размерности шага 10^{-8} , при котором одна из размерностей матрицы составила 500 000 элементов.

Время работы, требуемое для расчетов с предельно достижимыми на тестовой системе размерностями входных параметров, составило около 2 секунд, что является вполне допустимым для библиотечного модуля при используемых размерностях.

При рассмотрении уравнения (1) для Американского пут опциона как уравнения в частных производных параболического типа с поглотителем, были подобраны схема и шаблон, позволившие не только решить поставленную задачу, но и реализовать на основе полученного решения эффективный программный модуль.

Литература

1. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М. : Наука, 1977. 440 с.
2. Рихтмайер Р., Мортон К.У. Разностные методы решения краевых задач. М. : Мир, 1972. 421 с.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М. : ФАЗИС, 1998. Т. 1–2.
4. Шульга С.А., Войцеховский А.В. Решение смешанных систем дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей (задачи взаимодействия потоков излучения с твердотельной мишенью). Томск : Изд-во Том. ун-та. Препринт, 2001. 56 с.

Управление в модели Ферхюльста

Е.В. Мыльникова, С.И. Колесникова

ТУСУР

E-mail: ievghieniiia.mylnikova@mail.ru

Рассматривается проблема аналитического синтеза системы управления хаотическими объектами. В частности рассматривается нелинейная непрерывная модель Ферхюльста. Ставится задача построения системы управления для модели Ферхюльста асимптотически устойчиво выводящую объект на заданное многообразие, а так же разработка программного модуля для объекта Ферхюльста на объектном ориентированном языке программирования C#. В результате исследования была построена система управления модели Ферхюльста, исследовано качество управления в нерасчетных условиях, исследовано качество управления в зависимости от отношения шума к сигналу, реализован программный модуль объекта Ферхюльста на C#.

Ключевые слова: синергетика, аттрактор, инвариантное многообразие, модель Ферхюльста.

Модель Ферхюльста описывает процессы в прикладных областях: в физике, биологии, в экономике (модель роста выпуска продукции в условиях конкуренции) и т.д.

Дифференциальное уравнение модели Ферхюльста имеет вид:

$$\dot{x}_k = x_k * \lambda - \lambda * \alpha * x_k^2 \quad (1)$$

где x_k – переменная состояния, $x_k \in (0; 1.5)$, λ, α – параметры объекта $\lambda, \alpha = \text{const}$, $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ (рис. 1).

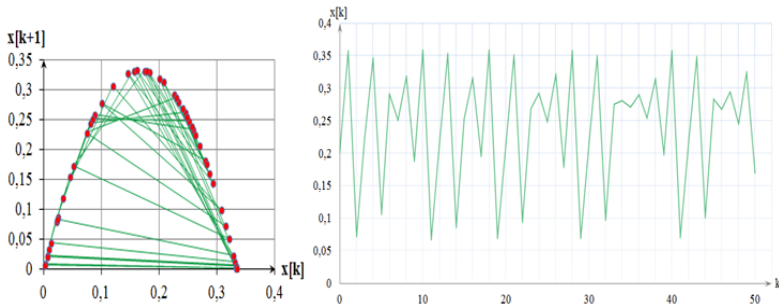


Рис. 1. Поведение модели Ферхюльста при начальных параметрах:
 $\alpha = 1; \lambda = 15; \Delta = 0,2; x_0 = 0,2$

Целью работы является синтез системы управления (СУ) поведения объекта, описывающую динамику управления модели, согласно методу аналитического конструирования нелинейных агрегированных регуляторов (АКАР [1]).

В ходе выполнения данной задачи были поставлены следующие задачи:

- 1) постановка задачи управления в модели Ферхюльста и синергетический синтез управления на базе метода АКАР;
- 2) исследование областей управляемости модели;
- 3) исследовать свойства СУ в области значений λ, α , где объект испытывает хаотическое поведение;
- 4) исследование качества управления в зависимости от отношения шума к сигналу (ОШС).

Ставится задача нахождения оптимального закона управления в виде функции $u(\Psi) = u(x_1, \dots, x_n)$ в пространстве состояний объекта, доставляющего глобальный минимум функционалу качества:

$$\Phi(x(k), u(k)) = \int_0^{\infty} (\Psi_k^2 + \omega^2 \dot{\Psi}_k^2) dk. \quad (2)$$

Целью управления является вывод объекта на заданное многообразие вида: $\Psi(x(k), x^*(k)) = 0$, где $x^*(k)$ – заданная траектория (аттрактивное состояние).

Применим технику синтеза системы управления объектом АКАР, согласно которой составляется уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\omega \dot{\Psi}_k + \Psi_k = 0. \quad (3)$$

Согласно вариационному принципу именно на решениях уравнения (3) функционала качества (2) достигается глобальный минимум. Решение уравнения (3) с учетом описания (1) приводит к системе управления вида (рис. 2):

$$\begin{cases} \Psi_k = x_k - x^*; \\ \dot{x}_k = x_k * \lambda - \lambda * \alpha * x_k^2; \\ x_{k+1} = x_k + \Delta * (\dot{x}_k + u_k); \\ u_k = -\omega^{-1} * \Psi_k - \dot{x}_k, \omega \in [0; 1]; \\ x^* = const \text{ или } x^* = 0,1 \sin(k) + 1; \\ u_0 = 0, x_0 = const \end{cases} \quad (4)$$

где Ψ_k – целевое многообразие (цель управления), $|\omega| < 1$ – параметр управления.

В докладе исследована система управления для нелинейного объекта в задаче стабилизации его состояния на базе метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов [1]. Результаты работы могут быть актуальны в системах управления плохо формализуемыми динамическими объектами в различных предметных областях.



Рис. 2. Поведение модели Ферхюльста.

Исходные данные: $\alpha = 1$; $\lambda = 15$; $\Delta = 0,2$; $x^* = 0,5$, $x^* = 0,1 \sin(k) + 0,7$

Результаты численного моделирования свидетельствуют о приемлемом качестве разработанной системы управления.

Литература

1. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. Таганрог: ТРТУ, М.: Энергоатомиздат, 1994. 344с.

Применение системы Mathematica в решении задач вычисления площадей, длин и объемов

Д.Е. Пчёлкина, В.М. Зюзьков

Томский государственный университет
E-mail:pchyolkina1993@mail.ru

Система компьютерной алгебры Mathematica – одно из наиболее распространённых в мире программных средств для осуществления численных и символьных компьютерных вычислений. Mathematica позволяет осуществлять широкий спектр символьных преобразований, в том числе и операции математического анализа: дифференцирование, интегрирование, разложение в ряд и другие.

Ключевые слова: система Mathematica, площадь, длина, объем, интеграл.

Цель работы – научиться вычислять площади, длины и объемы с использованием системы Mathematica. На практике бывает сложно вычислять площади плоских фигур и поверхностей, длины кривых и объемы тел. Система Mathematica упрощает эту задачу.

В работе было рассмотрено два подхода в решении данной задачи.

1) Традиционные задания геометрических фигур с помощью уравнений а) в декартовых координатах, б) в полярных координатах, с) параметрическое представление. В данном подходе используются формулы для вычисления площади, длины и объема из математического анализа.

2) Новые возможности, предлагаемые Mathematica, когда внутренняя часть фигуры или тела описывается с помощью логических выражений. В этом случае при вычислении интегралов используется функция Boole системы Mathematica. С помощью функции Boole неявно вычисляется сумма Дарбу (интегральная сумма) для получения значения интеграла.

Первый подход.

Рассмотрим пример вычисления площади плоской фигуры, заданной в полярных координатах.

Задание.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\rho = 4 \cos 2\varphi$, $\rho = 2$, $\rho \geq 2$.

Решение:

Сделаем чертеж искомой фигуры (рис.1) Для этого используем систему Mathematica. Что бы изобразить фигуру в полярных координатах мы используем функцию PolarPlot.

$$\text{PolarPlot}[\{2, 4\text{Cos}[2t]\}, \{t, 0, 2\pi\}]$$

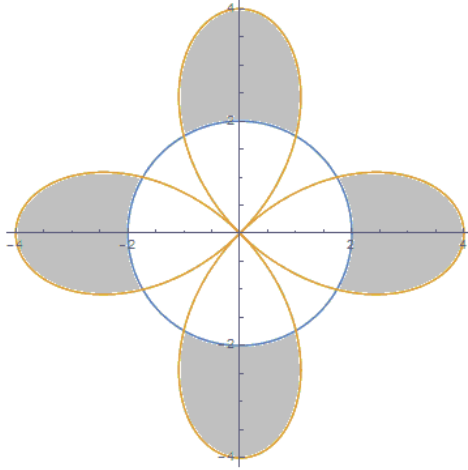


Рис. 1. Фигура ограниченная линиями: $\rho = 4 \cos 2 \varphi, \rho = 2, \rho \geq 2$

Затем, используя формулы для вычисления площади фигуры в полярных координатах, считаем интеграл, используя Mathematica.

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta;$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

$$r = f(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$S = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

$$\text{Integrate}[(4\text{Cos}[2t])^2 - 4, \{t, 0, \pi/6\}]4 \\ 4(\sqrt{3} + 2\pi/3)$$

Следующий пример показывает, как можно вычислять площадь фигуры заданной в параметрических координатах.

Задание

Найти площадь петли кривой $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$.

Решение:

Строим график заданной функции (рис.2), используем функцию ParametricPlot, которая изображает график в параметрических координатах.

$$\text{ParametricPlot}[\{\text{Cos}[t]^3, \text{Sin}[t]^3\}, \{t, 0, 2\pi\}]$$

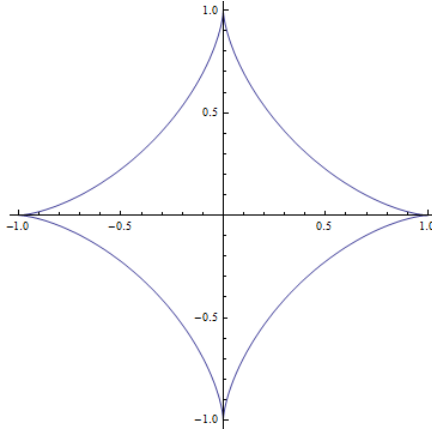


Рис. 2. Петля кривой $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$

Теперь, используя формулы вычисления площади фигуры в параметрических координатах, находим площадь искомой фигуры.

$$x = x(t), y = y(t), a < t < b$$

$$\int_{x(a)}^{x(b)} y dx = \int_a^b y(t)x'(t)dt.$$

$$\text{Integrate} \left[\text{Sin}[t]^3 D[\text{Cos}[t]^3, t], \left\{ t, \frac{\pi}{2}, 0 \right\} \right] 4$$

$$\frac{3\pi}{8}$$

Далее рассмотрим, как можно вычислить длину дуги кривой в системе Mathematica.

Задание:

Найти длину дуги кривой L. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$.

Решение:

Построим график данной кривой (рис. 3), используя функцию Plot, которая изображает график в декартовых координатах.

$$\text{Plot} \left[\left\{ \frac{x^2}{4} - \frac{\text{Log}[x]}{2} \right\}, \{x, 1, 2\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \text{"Expressions"} \right]$$

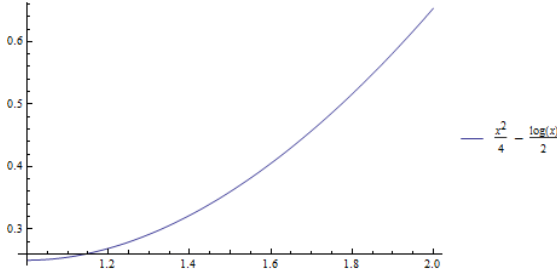


Рис. 3. Длина дуги кривой L

Теперь используя формулы для вычисления длины дуги кривой, вычисляем длину в системе Mathematica.

$$y = f(x), a < x < b$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx$$

$$\text{Integrate}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}, \{x, 1, 2\}\right]$$

$$\frac{1}{4}(3 + \text{Log}[4])$$

Теперь рассмотрим примеры вычисления интегралов с использованием новых возможностей системы Mathematica, когда внутренняя часть фигуры описывается с помощью логических операций.

Задание:

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = x, y^2 = 2x, 2y = x.$$

Решение:

Изобразим наши функции в одной плоскости (рис. 4), и найдем ту часть, которая описана всеми тремя графиками.

$$g = \text{Plot}\left[\left\{\sqrt{x}, \sqrt{2x}, \frac{x}{2}\right\}, \{x, 0, 9\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \text{"Expressions"}\right]$$

Что бы вычислить площадь данной фигуры, мы можем воспользоваться функцией Boole, которая является функцией логического типа. Опишем нашу фигуру с помощью неравенств и воспользовавшись данной функцией, вычисляем интеграл.

$$\text{Integrate}\left[\text{Boole}\left[x \leq y^2 \ \&\& \ 2x \geq y^2 \ \&\& \ y \geq \frac{x}{2}\right], \{x, 0, 10\}, \{y, 0, 5\}\right]$$

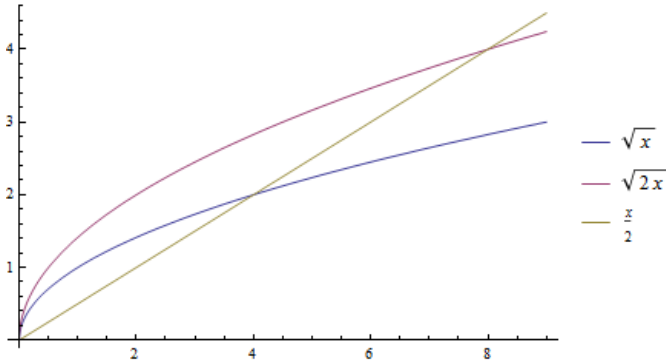


Рис. 4. Фигура, ограниченная линиями: $y^2 = x, y^2 = 2x, 2y = x$

Теперь рассмотрим, как с системе Mathematica можно вычислять объемы.

Задание:

Найти объем фигуры, полученной при вращении функции $x \sin^2 x$, вокруг осей координат.

Решение:

Сначала рассмотрим вращение данной функции вокруг оси OX. Изобразим фигуру (рис. 4), объем которой необходимо вычислить.

ParametricPlot3D[$\{r, g[r] \text{Cos}[t], g[r] \text{Sin}[t]\}, \{r, 0, \pi\}, \{t, 0, 2\pi\}$]

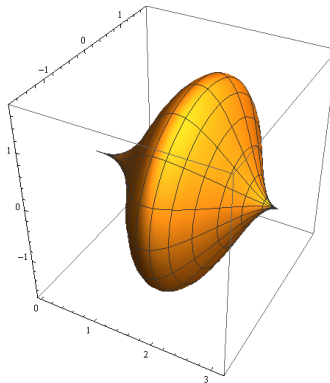


Рис. 5. Вращение функции вокруг оси OX

И воспользовавшись формулами для вычисления объема тела вращения вокруг оси X, находим объем.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$volx = \text{Integrate}[Pi g[x]^2, \{x, 0, Pi\}]$$

$$\frac{1}{64} \pi^2 (-15 + 8\pi^2)$$

Аналогично поступаем в нахождение объема тела вращения вокруг оси У. Только в качестве расчетных формул используем формулы для нахождения объема тела вращения вокруг оси ОУ.

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

$$vol y = \text{Integrate}[2 Pi x g[x], \{x, 0, Pi\}]$$

$$\frac{1}{6} \pi^2 (-3 + 2\pi^2)$$

Задание:

Область описывается неравенством: $y^2 - 4x^2 + 4x^4 \leq -z^2$, найти объем вращения.

Решение

Изобразим фигуру (рис. 6), объем которой необходимо найти.

$$\text{RegionPlot3D}[\text{ineq}, \{x, -1, 1\}, \{z, -1, 1\}]$$

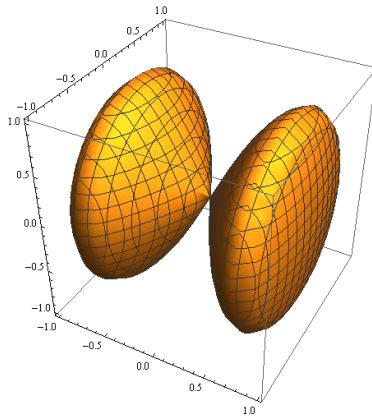


Рис. 6. Область, описанная неравенством

Так как данная фигура описывается неравенством, то для вычисления ее объема мы можем воспользоваться функцией Boole.

$$\text{ineq} = y^2 - 4x^2 + 4x^4 \leq -z^2;$$

$$\text{Integrate}[\text{Boole}[\text{ineq}], \{x, -\text{Infinity}, \text{Infinity}\}, \{y, -\text{Infinity}, \text{Infinity}\}, \{z, -\text{Infinity}, \text{Infinity}\}]$$
$$\frac{16\pi}{15}$$

Таким образом в системе Mathematica можно просто и легко вычислять площади, длины и объемы фигур, используя традиционные методы и возможности Mathematica, связанные с использованием логических выражений при описании геометрических фигур.

Литература

1. Седов Е. Основы работы в системе компьютерной алгебры Mathematica. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/4765/1039/info>
2. Wolfram Mathematica. Русскоязычная поддержка. URL: <http://www.wolframmathematica.ru/Mathematica>. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Mathematica>
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. М. : Наука, 1978. С. 576.

Построение адаптивных сеток в задаче об изменении концентрации ауксина

В.А. Осипов, Н.Н. Меркулова

Томский государственный университет

E-mail: Viktor456a@mail.ru

Рассматривается диффузионная модель изменения концентрации ауксина с применением адаптивных сеток. Адаптивные сетки увеличивают точность и экономичность вычислительных алгоритмов. Для построения адаптивной сетки применяется вариационный метод. Он сводится к решению системы уравнений, записанной в координатах вычислительного пространства, и нелинейного уравнения для определения узлов сетки. Уравнения для сетки решаются методом прогонки с итерациями. Результаты вычислительного эксперимента показывают, что подбор параметров, отвечающих за гладкость и искажение, позволяет сократить количество итераций и уменьшить погрешность вычислений. Данная статья представляет интерес для исследователей в области математической биофизики.

Ключевые слова: диффузионная модель, ауксин, ингибитор, адаптивная сетка, вариационный метод, метод прогонки.

Для решения задач математической физики применяются численные методы, основанные на понятии расчетной сетки. Сейчас возрастает интерес к адаптивным сеткам, которые могут сами подстраиваться под решение задачи [1].

Использование адаптивных сеток при численном решении задач математической физики позволяет сгущать узлы в нужных подобластях и существенно повысить точность вычислений [2].

В настоящей работе изучается математическая модель изменения концентрации ауксина (гормона роста) на ранних стадиях развития растений [3]. Модель описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(1-u) - g_1 uv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + div(1-v) - g_2 uv, \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ ауксин и ингибитор соответственно. К (1) добавляются начальные $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$, $(x, t) \in \bar{G} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, и граничные условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Здесь b, g_1, D_v, D_u, d, g_2 – параметры модели. Требуется найти функции $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ из пространства $C_2^1(G) \cap C(\bar{G})$, удовлетворяющие (1)–(2), с применением адаптивных сеток.

При исследовании диффузионной модели на устойчивость система (1) была упрощена при предположениях:

1) время усреднения по объему за счет диффузии много меньше характерного времени процесса (до установления);

2) процесс протекает во всех точках объема одинаково.

Для полученной упрощенной системы были найдены стационарные решения, которые исследованы на устойчивость. В результате определены границы изменения параметров модели:

$$\begin{aligned} b &\neq 0, & d &\neq 0; \\ bd - g_1(d - g_2) &< 0; \\ d - g_2 &> 0. \end{aligned}$$

При этом было построено точное решение, используемое в дальнейшем для сравнения с численным:

$$u = u_0 e^{bt}, \quad v = v_0.$$

Диффузионная модель также исследована на устойчивость.

При проведении вычислительного эксперимента принято, что $l = 10, T = 10$.

Численное решение задачи (1)–(2) находилось с применением неявной разностной схемы на равномерной сетке [4]:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left[D_u \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} - D_u \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} \right] + \\ \quad + f_1(u_i^n, v_i^n); \\ \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = D_v \frac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_2(u_i^n, v_i^n); \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} i &= \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{0, N-1}; \\ u_i^0 &= u_0, \quad i = \overline{0, M}; \\ v_i^0 &= v_0, \quad i = \overline{0, M}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_0^n &= u_1^n; \quad v_0^n = v_1^n; \\ u_M^n &= u_{M-1}^n; \quad v_M^n = v_{M-1}^n; \end{aligned} \quad (5)$$

$$M = \frac{l}{h}, \quad N = \frac{T}{\tau}.$$

Доказано, что схема (3)–(5) имеет первый порядок точности (по времени и по пространству), абсолютно устойчива по начальным данным. Разностные уравнения решаются с использованием итерационного процесса с прогонкой на каждой итерации. Процесс сходится за 3 итерации на каждом временном слое. Результат данного эксперимента представлен на рис. 1.

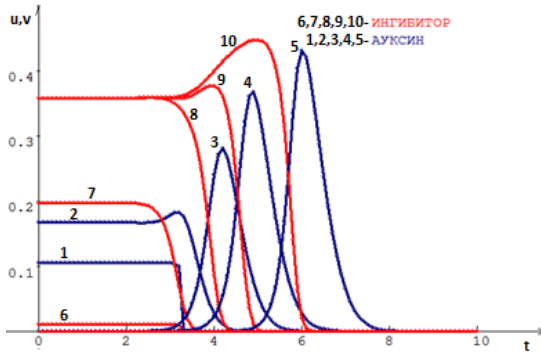


Рис. 1. Изменение концентрации ауксина и ингибитора на равномерной сетке в сечении $x = 1$

Рисунок демонстрирует изменение концентрации ауксина и его ингибитора (этилена). С течением времени получено, что ауксин наращивает свою концентрацию за счет автокатализа. Увеличение концентрации ауксина приводит к заметному росту концентрации этилена, что в свою очередь тормозит увеличение концентрации ауксина и в системе устанавливается стационарное состояние.

Построение адаптивной сетки основано на вариационном методе, который широко применяется при конструировании сеток, удовлетворяющих нескольким требованиям: невырожденность, гладкость, близость к ортогональным сеткам [2].

Эти требования учитываются при построении специальных функционалов, заданных на множестве гладких или дискретных преобразований. Для построения сетки необходимо взять линейную комбинацию соответствующих функционалов с весами λ_i :

$$\Phi = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3.$$

Весовые параметры λ_i управляют необходимыми свойствами.

Чтобы построить подвижную сетку, нужно задать вычислительное пространство (ξ, τ) , и физическое пространство (x, t) . В этих пространствах задается разделение на время и пространство.

Рассмотрим разделенное отображение

$$x = x(\xi, \tau), \quad t = \tau, \quad (6)$$

и обратное к нему

$$\xi = \xi(x, t), \quad \tau = t. \quad (7)$$

Вариационный принцип формулируется следующим образом: среди всех отображений вида (6), удовлетворяющих заданным граничным условиям

$$x(0, \tau) = 0, \quad x(l, \tau) = l,$$

найти такое, которое минимизирует функционал

$$I = \lambda_S I_S + \lambda_V I_V + \lambda_B I_B, \quad (8)$$

где $\lambda_S, \lambda_V, \lambda_B$ – положительные заданные числа, функционалы I_S, I_V, I_B отвечают за свойства адаптивной сетки.

Тогда построение сетки на основе вариационного принципа сводится к решению краевой задачи:

$$\begin{cases} x_{\xi\xi}(\lambda_S + \lambda_V + \lambda_B) = -\left(\frac{\lambda_V J^2}{2W} \frac{\partial W}{\partial x} - \lambda_B x_{\xi\xi}^*\right); \\ x(0, \tau) = 0, \quad x(l, \tau) = l. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $W = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|$ – весовая функция, $J = x_\xi$ – якобиан преобразования.

Система дифференциальных уравнений (1) на адаптивной сетке принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial(Ju)}{\partial \tau} = \frac{\partial(vu)}{\partial \xi} + D_u \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + Jf_1(u, v); \\ \frac{\partial(Jv)}{\partial \tau} = \frac{\partial(vv)}{\partial \xi} + D_v \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + Jf_2(u, v); \end{cases} \quad (10)$$

$$u(\xi, 0) = u_0(\xi); \quad v(\xi, 0) = v_0(\xi). \quad (11)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=10} = 0; \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial \xi}\right|_{\xi=10} = 0; \quad (12)$$

$V = \frac{\partial x}{\partial \tau}$ – скорость движения узлов адаптивной расчетной сетки.

Для решения (10)-(12) воспользуемся разностной аппроксимацией [2]:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} J_j^{n+1} - u_j^n J_j^n}{\Delta \tau} &= \frac{u_{j+1/2}^{n+1} V_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^{n+1} V_{j-1/2}^n}{\Delta \xi} + \\ &+ \frac{D_u}{\Delta \xi} \left(\frac{1}{J_{j+1/2}^{n+1}} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta \xi} - \frac{1}{J_{j-1/2}^{n+1}} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + f_{1j}^n J_j^n; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{v_j^{n+1}J_j^{n+1} - v_j^nJ_j^n}{\Delta\tau} = \frac{v_{j+1/2}^{n+1}V_{j+1/2}^n - v_{j-1/2}^{n+1}V_{j-1/2}^n}{\Delta\xi} +$$

$$+ \frac{D_v}{\Delta\xi} \left(\frac{1}{J_{j+1/2}^{n+1}} \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta\xi} - \frac{1}{J_{j-1/2}^{n+1}} \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta\xi} \right) + f_{2j}^n J_j^n;$$

$$\frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{\Delta\xi} = 0; \quad \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{\Delta\xi} = 0;$$

$$\frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{\Delta\xi} = 0; \quad \frac{v_N^{n+1} - v_{N-1}^{n+1}}{\Delta\xi} = 0;$$

$$u_j^0 = u_{0j}; \quad v_j^0 = v_{0j}.$$

Здесь $u_{j+1/2} = \frac{u_{j+1} + u_j}{2}$; $v_{j+1/2} = \frac{v_{j+1} + v_j}{2}$; $\Delta\tau$ – шаг по времени; n – номер шага по времени, $\Delta\xi$ – шаг по пространству.

Разностные уравнения решаем с помощью итерационного метода. Для примера запишем первое уравнение из (13) в виде:

$$\frac{u_j^{(k+1)}J_j^{(k+1)} - u_j^{(k)}J_j^{(k)}}{\Delta\tau} = \frac{u_{j+1/2}^{(k+1)}V_{j+1/2}^{(k)} - u_{j-1/2}^{(k+1)}V_{j-1/2}^{(k)}}{\Delta\xi} +$$

$$+ \frac{D_u}{\Delta\xi} \left(\frac{1}{J_{j+1/2}^{(k+1)}} \frac{u_{j+1}^{(k+1)} - u_j^{(k+1)}}{\Delta\xi} - \frac{1}{J_{j-1/2}^{(k+1)}} \frac{u_j^{(k+1)} - u_{j-1}^{(k+1)}}{\Delta\xi} \right) + f_{1j}^{(k)} J_j^{(k)},$$

где k – номер итерации.

В качестве нулевой итерации берем значение u_j^n с предыдущего шага по времени. Условием окончания итерационного процесса считаем выполнение неравенства $\max_j |u_j^{(k+1)} - u_j^{(k)}| < \varepsilon$.

Для определения $u_j^{(k+1)}$ используется метод прогонки.

Доказано, что разностная задача условно устойчива в вычислительном пространстве и условие устойчивости имеет вид:

$$\frac{1}{\Delta\tau} \geq \frac{1}{\Delta\xi} - \frac{2D_u}{(\Delta\xi)^2}.$$

Схема (13) аппроксимирует дифференциальную задачу (10)–(12) с первым порядком относительно шагов по пространству и по времени.

Вычислительный эксперимент на адаптивной сетке проводился в области $\bar{G} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 10, 0 \leq t \leq 10\}$, с шагом по пространству $h = 0.1$ и по времени $\tau = 0.01$. Результаты сравнивались с результатами, полученными по неявной схеме с итерациями. С помощью различных комбинаций параметров $\lambda_S, \lambda_V, \lambda_B$, можно управлять поведением сетки. Например, при $\lambda_B = 0$ строится равномерная сетка, это позволяет сокра-

тить количество итераций, процесс будет сходиться за 2 итерации на каждом слое. Графики, представленные ниже, демонстрируют полученные результаты. Анализ графиков позволяет наглядно увидеть, где сетка подстраивается под решение или наоборот искажает его, что приводит к существенной погрешности вычислений.

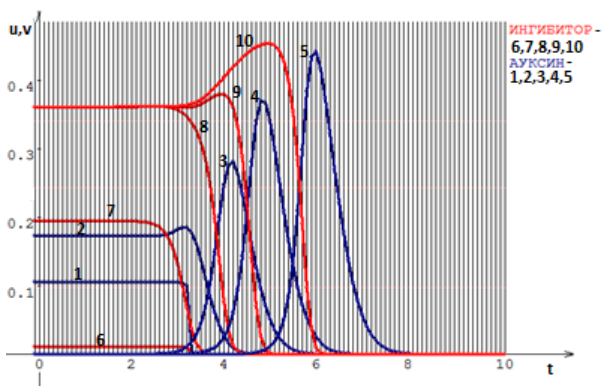


Рис. 2. Изменение концентрации ауксина и ингибитора на адаптивной сетке в сечении $x = 1$ ($\lambda_s = 50$, $\lambda_v = 0$, $\lambda_b = 50$)

Поведение ауксина и ингибитора на рис. 2 не отличается от поведения на рис. 1: волны ауксина также постепенно наращивают свою реакцию, а волны ингибитора догоняют их. Максимальная по модулю погрешность решений, полученных с помощью неявной схемы с итерациями и на адаптивной сетке, различается в сотых долях. Выбор других параметров $\lambda_s, \lambda_v, \lambda_b$ позволяет управлять построением сетки. Например, на рис. 3 при $\lambda_s = 100$, $\lambda_v = 1$, $\lambda_b = 100000$ заметно небольшое искажение линий сетки. Здесь максимальная погрешность для ауксина равна 0.013, для ингибитора равна 0.007, а количество итераций такое же, как и в первом эксперименте, а именно 2000. Выбор данного набора параметров, позволяет максимально приблизиться к решению, полученному с помощью неявной схемы с итерациями.

Для выбора коэффициентов $\lambda_s, \lambda_v, \lambda_b$ нет определенного метода, позволяющего найти оптимальные параметры, т.к. они очень сильно зависят от размерности задачи и от начальных данных. При одних данных коэффициенты $\lambda_s, \lambda_v, \lambda_b$ позволяют построить сетку, которая не искажает решение, а при других наоборот приводит к сильным погрешностям.

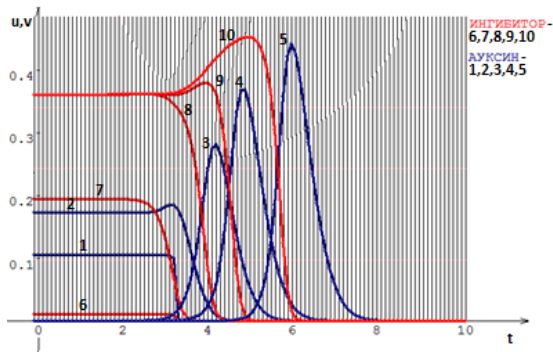


Рис. 3. Изменение концентрации ауксина и ингибитора на адаптивной сетке в сечении $x = 1$ ($\lambda_s = 100$, $\lambda_v = 1$, $\lambda_b = 100000$)

Результаты расчетов, полученные по обоим схемам, согласуются между собой и адекватно описывают физику рассматриваемого процесса.

Литература

1. Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 3–41.
2. Дмитриева И.С., Каниметов К.А., Саранча Д.А. Метод подвижных сеток в задаче моделирования миграции леммингов // Численное моделирование в проблеме окружающей среды. Фрунзе: Илим, 1989. С. 109–126.
3. Гельфанд Е.В., Демин О.В., Данилина Е.Э. Математическое моделирование изменений концентраций ауксина на ранних этапах эмбриогенеза растений // Биофизика. 1999. Т. 44, вып. 1. С. 112–119.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.

Исследование задачи о разрушении плотины

А.А. Потоцкая, М.Д. Михайлов

Томский государственный университет

E-mail: bubuzyonok@yandex.ru

Проведено численное исследование задачи о разрушении плотины, описанной в рамках модели «мелкой воды». Рассмотрены случаи течения над плоским дном и над уступом. Проведено сравнение полученных результатов численных расчетов с результатами из [6, 8].

Ключевые слова: математическая модель, уравнения мелкой воды, схема Мак-Кормака, схема Лакса-Фридрикса, метод Борнса и Бука.

В настоящее время возрастает значение теоретических исследований в области экологии. Создаются математические модели, описывающие различные физические процессы, однако их реализация затруднена, поскольку задачи экологии плохо формализованы и, следовательно, сложны для математического описания и численного решения. Например, задача о разрушении плотины описывается в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости в канале, продольный размер которого много больше его поперечного сечения. При таких допущениях вертикальной составляющей скорости можно пренебречь. Дополнительно предполагается, что жидкость имеет постоянную температуру и находится в поле сил тяжести.

Исследуется плоское одномерное течение жидкости в горизонтальном канале. В начальный момент времени вода считается покоящейся. Течение жидкости после разрушения плотины описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, называемых уравнениями мелкой воды [1]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{u})}{\partial x} = \bar{S}, \quad (1)$$

$$\text{где } \bar{u} = (h, p)^T, \bar{F}(\bar{u}) = \left(p, \frac{p^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right)^T, \bar{S} = \left(0, -gh \frac{dzb(x)}{dx} \right)^T,$$

u – скорость течения воды, h – глубина водного потока, $p = hu$, $Zb(x)$ – форма дна.

В начале рассматривается более простой случай: течение жидкости в горизонтальном канале постоянного поперечного сечения, то есть форма дна задается постоянной $Zb(x) = 0$. Тогда система (1) с соответствующими начальными условиями принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} = -\frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0 = 0, \\ h(x, 0) = \begin{cases} h_1, & x < x_0, \\ h_0, & x \geq x_0, \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

где x_0 – точка, в которой находится плотина.

Для численного решения задачи (2)–(3) используется схема Мак-Кормака второго порядка точности [2]. В силу отсутствия в ней схемной вязкости, при численном решении возникают осцилляции, которые необходимо сглаживать. Для этого используется модификация метода Бориса и Бука [3]. Она проще, чем сам метод, носит локальный характер и не нарушает консервативности разностной схемы. Постоянная диффузия в этом методе вводится только в областях немонотонности. При этом, как и в методе Бориса и Бука, незначительно сглаживаются физические экстремумы, но, главным образом, устраняются осцилляции, порожденные схемой. Коэффициент сглаживания в случае разрывных течений газа в [3] рекомендуется брать из промежутка $[\frac{1}{10}; \frac{1}{6}]$. В предыдущей работе [4] был найден промежуток $[\frac{1}{100}; \frac{1}{60}]$, из которого необходимо брать коэффициент сглаживания в случае мелкой воды.

Итак, численно решается задача о распаде разрыва (2)–(3) над плоским дном на промежутке $[0; L]$ с помощью схемы Мак-Кормака:

$$\begin{cases} \tilde{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\tau}{h} \cdot (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_j^n), \\ \bar{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot [\tilde{u}_j^{n+1} + \bar{u}_j^n - \frac{\tau}{h} \cdot (\tilde{F}_j^{n+1} - \tilde{F}_{j-1}^{n+1})] \end{cases} \quad (4)$$

и модификации метода Бориса и Бука:

$$\bar{u}_j^* = \bar{u}_j^{n+1} - (\varphi_{j+1/2}^* - \varphi_{j-1/2}^*), \quad (5)$$

где вводится численная диффузия с постоянным коэффициентом:

$$\bar{u}_j^{n+1} = u_j^{n+1} + q \cdot (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}).$$

Антидиффузионные потоки вычисляются следующим образом:

$$\tilde{\varphi}_{j+1/2} = q \cdot (\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_j^{n+1}),$$

причем, ограничение этих потоков осуществляется по формуле:

$$\varphi_{j+1/2}^* = \kappa \cdot \max \left\{ 0, \min \left[\kappa \Delta_{j-1/2}, \left| \tilde{\varphi}_{j+1/2} \right|, \kappa \Delta_{j+3/2} \right] \right\},$$

где $\kappa = \text{sign}(\tilde{\varphi}_{j+1/2})$, $\Delta_{j+1/2} = \bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_j^{n+1}$,

с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} u_j^0 = u_0 = 0, \\ h_j^0 = \begin{cases} h_1, & j < j_0, \\ h_0, & j \geq j_0. \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $L = 2\,000$ м, $h_1 = 1$ м, $h_0 = 0,001$ м, j_0 – узел, соответствующий точке x_0 .

На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи (2)–(3) из [5], полученные методом частиц, а на рисунке 2 результаты расчетов по схеме Мак-Кормака с использованием модификации метода Бориса и Бука с оптимальным коэффициентом сглаживания равным 0,01.

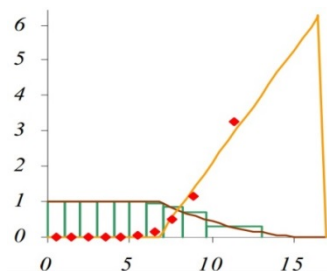


Рис. 1

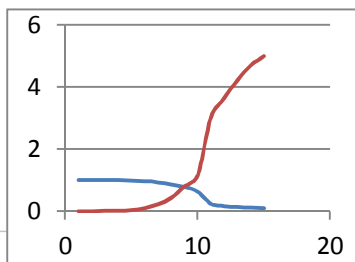


Рис. 2

Анализ и сравнение графиков показывают, что численные результаты в обоих случаях достаточно близки. Однако следует заметить, что кривые, построенные по результатам расчетов по схеме Мак-Кормака с использованием сглаживания (5), являются более гладкими.

Кроме того, следует обратить внимание на следующие особенности рассматриваемого процесса. Как видно из начального условия (3), функция $h(x)$ терпит разрыв в точке $x = x_0$. При $t > 0$ разрыв сглаживается, а поверхность жидкости, находящейся в движении, принимает форму ветви параболы, касающейся оси x .

Также следует отметить особенности поведения решения при h_0 близком к нулю. В этом случае глубина и скорость воды в створе плотины постоянны. Эта особенность отмечается в [6] и подтверждается при численном решении задачи методом частиц в [5] и методом Мак-Кормака. При этом высота поверхности воды всюду непрерывна и моно-

тонно возрастает от фронта волны влево, а скорость воды в этом направлении падает. Такая картина наблюдается при всех значениях h_0 меньше критического, составляющего 13.8% [5] от значения h_1 .

Далее задача усложняется введением рельефа дна. Очевидно, что рельеф в реальных водоемах очень сложный, поэтому моделируется более простой случай: разрушение плотины над уступом дна. Рассматривается задача (1) о течении над неровностями дна на промежутке $[0, L]$. С соответствующими начальными:

$$\begin{cases} h(x, 0) = Hbx - Zb(x), \\ p(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

и граничными:

$$\begin{cases} \frac{\partial h(0, t)}{\partial x} = 0, & p(0, t) = 0.18, \\ h(L, t) = 0.33, & \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

условиями. Здесь форма дна задается по формуле:

$$Zb(x) = \max(0, 0.2 - 0.05(x - 10)^2).$$

Решение задачи (1), (7)–(8) ищется численно с помощью схемы Лакса-Фридрихса первого порядка [7]:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{\bar{u}_{j+1}^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2} - \frac{\tau}{2h} (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n) + \tau S_j^n. \quad (9)$$

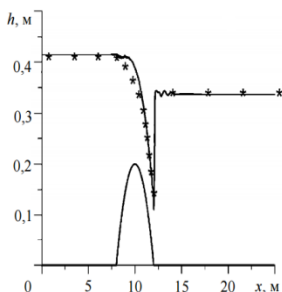


Рис. 3

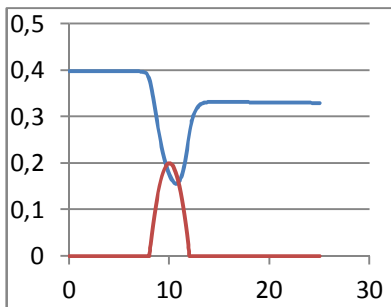


Рис. 4

Результаты расчетов, представленные в виде графиков на рис. 4, качественно совпадают с результатами из [8] (рис. 3). Однако в силу первого порядка точности используемой схемы, физические экстремумы сглаживаются. Поэтому полное количественное совпадение не достигается.

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. : Наука, 1978. 688 с.
2. Уорминг Р.Ф., Кутлер П., Ломакс Г. Нецентральные разностные схемы второго и третьего порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа // Ракетная техника и космонавтика. 1973. Т. 11, № 2. С. 76–85.
3. Войнович П.А., Жмакин А.И., Попов Ф.Д., Фурсенко А.А. О расчете разрывных течений газа. М., 1977. 35 с.
4. Потоцкая А.А., Михайлов М.Д. Моделирование задачи о распаде разрыва в случае мелкой воды // Сборник материалов конференции «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики». 2014
5. Богомолов С.В., Захаров Е.В., Зеркаль С.В. Моделирование волн на мелкой воде методом частиц // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 3. С. 103–116.
6. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. литературы, 1959. 617 с.
7. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Springer Science & Business Media, 2009.
8. Чуруксаева В.В., Михайлов М.Д. Численное моделирование потока жидкости над рельефом дна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 1.

Решение обратной одномерной задачи электроимпедансной томографии с помощью нейронных сетей

Е.В. Семёнов

Томский государственный университет

E-mail: semyonov@math.tsu.ru

Искусственные нейронные сети позволяют решать задачи, где обычные алгоритмы и методы применять затруднительно. Они обучаются путем изменения весовых коэффициентов, связывающих отдельные нейроны, по заданной обучающей выборке, включающей в себя векторы входных значений и соответствующие им векторы, которые ожидаются на выходе из сети.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, обратная задача, персептрон, алгоритм обратного распространения ошибки.

Рассматривается прямая одномерная задача электроимпедансной томографии [1] в стержне длиной Lx с заданными границами сред (x_1, x_2, \dots) , а также проводимостями $(\sigma_0, \sigma_1, \dots)$ каждой из подобластей области стержня. Используя приведенные данные рассчитывается разность потенциалов на концах стержня по следующим формулам:

$$\frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{du}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \sigma \frac{du}{dx} = I = const - \text{постановка дифференциальной зада-}$$

чи. Переходим к разностной постановке, заменяя дифференциальный оператор разностным. Непрерывную область стержня необходимо разбить на некоторое количество участков с шагом $h = \frac{Lx}{N-1}$, где N – количество точек разбиения области. Получим разностное уравнение

$$\sigma_i \frac{du_i}{dx_i} = I = const. \text{ Зададим условия на каждой границе области:}$$

$$x = x_0 = 0 : z_1 \sigma_0 \frac{du_1}{dx} + u_1 = U_L ; \sigma_0 \frac{du_1}{dx} = I_L ;$$

$$x = x_1 : \sigma_0 \frac{du_1}{dx} = \sigma_1 \frac{du_2}{dx}, u_1 = u_2 ;$$

...

$$x = x_{n-1} : \sigma_{n-2} \frac{du_{n-1}}{dx} = \sigma_{n-1} \frac{du_n}{dx}, u_{n-1} = u_n ;$$

$$x = x_n = L : z_n \sigma_{n-1} \frac{du_n}{dx} + u_n = U_R ; \sigma_{n-1} \frac{du_n}{dx} = I_R ;$$

Зададим граничные условия для нашей разностной задачи:

$$x = x_0 = 0 : z_1 I + u_1 = U_L = 0,$$

где z_1 – сопротивление левого электрода, $I = I_L = I_R$ – приложенный ток, u_1 – искомая функция изменения потенциала в области стержня, U_L – приложенное к левому концу стержня напряжение.

$$x = x_n = Lx : z_n I + \sum_{i=1}^n \frac{I}{\sigma_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) - z_1 I + U_L = U_R,$$

где z_n – сопротивление правого электрода, σ_i – сопротивление подобласти (x_i, x_{i+1}) , U_R – напряжение на правом конце стержня.

Второе граничное условие вытекает из решения прямой задачи, при расчете изменения потенциала в каждой точке подобласти:

$$u_i(x) = \frac{I}{\sigma_{i-1}} (x - x_{i-1}) + C \Rightarrow u_i(0) = -z_1 I \Rightarrow u_i(x) = \frac{I}{\sigma_0} x - z_1 I + U_L;$$

$$u_2(x) = \frac{I}{\sigma_1} (x - x_1) + C \Rightarrow u_2(x_1) = C = \frac{I}{\sigma_0} x_1 - z_1 I + U_L \Rightarrow$$

$$u_2(x) = \frac{I}{\sigma_1} (x - x_2) + \frac{I}{\sigma_0} x_1 - z_1 I + U_L;$$

...

$$u_{n-1}(x) = \frac{I}{\sigma_{n-2}} (x - x_{n-2}) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{I}{\sigma_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) - z_1 I + U_L;$$

$$u_n(x) = \frac{I}{\sigma_{n-1}} (x - x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{I}{\sigma_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) - z_1 I + U_L;$$

Для успешного решения задачи также необходимо условие сопряжения на границах области:

$$U_L + U_R = 0; U_L = -U; U_R = U \Rightarrow U = \frac{I}{2} \left[z_n - z_1 + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})}{\sigma_{i-1}} \right].$$

После решения набора прямых задач имеем некоторую выборку, которую можно компоновать как угодно для решения обратной задачи. Решение обратной задачи, в свою очередь, разбивается на два случая.

Первый случай. Известна разность потенциалов на концах стержня, а также проводимости подобластей области стержня. Необходимо решить обратную задачу по нахождению местоположения и размера каждой из подобластей области стержня (x_i, x_{i+1}) . Сначала решалась задача по

нахождению размера одной подобласти, после успешного решения (для значений из выборки достигнута точность порядка 10^{-26} за 5 прогонок выборки через сеть, для значений не из выборки 10^{-10}) была поставлена задача нахождения размера нескольких подобластей, больше одной. С такой задачей сеть справилась более чем успешно (погрешность выходного значения сети с точным решение составила 10^{-11}). Т.к. зависимость искомого решения от известных величин была линейной (рис. 1), для аппроксимации подошла искусственная нейронная сеть с линейной функцией активации.

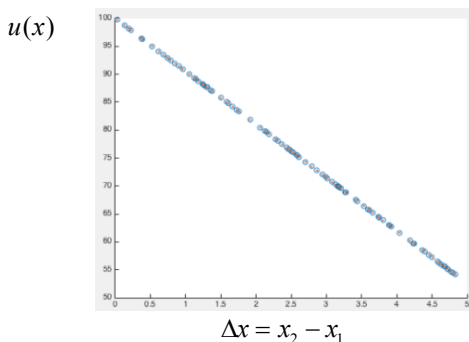


Рис. 1. Линейная зависимость разности потенциалов на концах области от размера подобласти с отличной от краевых проводимостью

При использовании искусственной нейронной сети с нелинейной функцией активации на всех слоях кроме последнего (последний слой линейный) сеть хуже сглаживала линейное решение (сеть обучалась за 1 000 итераций до 10^{-9} для значения из выборки, и с ошибкой 10^{-5} для значения не из выборки).

После этого задача была усложнена. Требовалось найти не только размер каждой из подобласти, но и их положение в диапазоне $(0, Lx)$. В результате сети не хватало входных данных, потому как от положения подобласти разность потенциалов не зависела (рис. 2). Было принято решение дополнить выборку значением интеграла области под графиком изменения потенциала. При такой выборке было очевидно, что значение интеграла зависит от положения подобластей и несет существенную информацию на входе искусственной нейронной сети. После расширения выборки сеть справилась с задачей как для одной подобласти с отличной

проводимостью (ошибка 10^{-5}), так и для более одной подобласти с отличной от крайних подобластей области стержня (ошибка 10^{-3}). Результаты рассчитывались для выборки размером 100 векторов, пределом обучения считалась прогонка всей выборки до 1 000 раз, или достижение погрешности на выходе сети порядка 10^{-25} . Не всегда было удобно брать большую выборку. Для линейных зависимостей решения вполне подходила выборка из двух векторов. Это вызвано тем, что линейная ИНС аппроксимирует линейную функцию, а, как известно, для того чтобы провести прямую, достаточно пары точек.

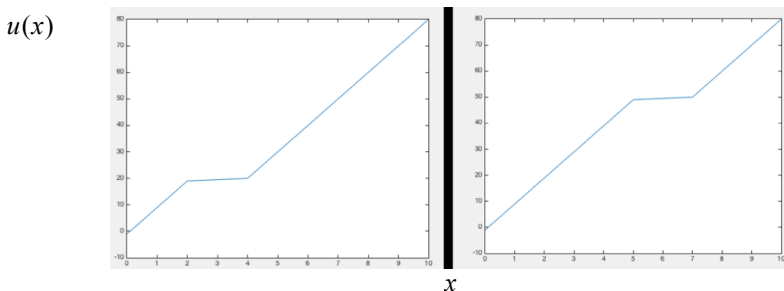


Рис. 2. Отсутствие зависимости разности потенциалов от положения подобласти с отличной проводимостью

Второй вариант. Известна разность потенциалов на концах стержня, а также положение и размеры подобластей области стержня. Требуется решить обратную задачу по нахождению проводимостей всех подобластей. Сначала решалась задача с одной подобластью, проводимость которой отличалась от проводимостей подобластей на краях стержня. В этом случае сети не было достаточно иметь на входе лишь разность потенциалов и положение подобласти с ее размером. Это вызвано тем, что через одну область «преломления» потенциала можно провести сколь угодно много наклонных прямых (рис. 3), зависящих от проводимости. Т.е. проводимости сред не определялись однозначно. Для решения этой проблемы выборка сети была расширена на значение отношения проводимости внутренней подобласти к проводимости одной из крайних подобластей. В результате сеть смогла определить достаточно точные значения проводимостей (ошибка 10^{-2}). Для усложнения задачи была выбрана область, содержащая более одной подобласти с проводимостью, отличной от проводимости крайних подобластей стержня. Значения отношений каждой

из таких подобластей к крайним только сбивало бы сеть, поэтому добавленное значение отношения проводимостей в выборку было также заменено на значения интеграла под графиком функции изменения потенциала.

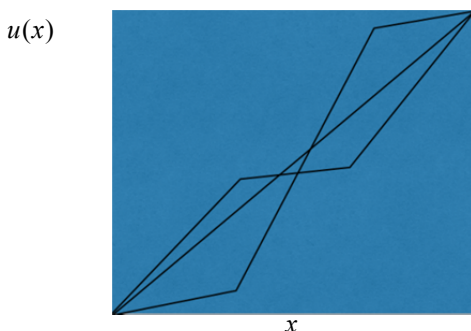


Рис. 3. При разных проводимостях одна и та же разность потенциалов
 $(u_1 = u_2 = \dots)$

Стоит отметить, что чем больше подобластей добавлялось в область стержня $(0, Lx)$, тем хуже сеть находила нужное решение. Для двух видов сред ошибка 10^{-2} , для трех видов сред ошибка 10^0 , для четырех видов сред 10^1 . Важной проблемой в нахождении проводимостей сред стало то, что потенциал возрастает на величину, обратную проводимости среды, в таком случае значения проводимостей больше единицы меняли потенциал, практически одинаково (рис. 4).

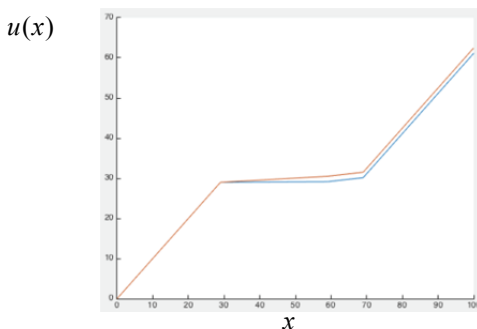


Рис. 4. Варьирование одной из проводимостей в 10 раз, дало изменение потенциала на величину порядка единицы

Например, если проводимость среды была 10, сеть без проблем могла определить его и как 7 и как 5, сославшись на ошибку подстройки весов и ограниченное количество итераций обучения, т.к. погрешность в таком случае была мала. Если же значения проводимостей (σ) были меньше единицы, то малое возмущение таких величин давало большое изменение обратного им значения $\left(\frac{1}{\sigma}\right)$. Такие значения проводимостей сеть нахо-

дила достаточно точно. Решением этой проблемы послужила нормализация выходных данных проводимостей, сеть находила значения проводимостей в интервале $(0,1]$, а далее выходные значения умножались на коэффициент нормализации, используемый при обучении сети.

Обратные задачи решались многослойными нейронными сетями с линейной выходной функцией активации и либо линейными, либо нелинейными (сигмоид, тангенс гиперболический) функциями активации скрытых слоев [2]. Количество нейронов в каждом из скрытых слоев варьировалось от сложности решаемой задачи. Исследования зависимости точности решения от количества используемых слоев не проводилось. Огромное влияние на обучение сети оказал параметр скорости обучения сети. Существуют множество способов подбора этого параметра, но все они зависят от множества факторов сети. Нет универсального способа, который бы справился с подбором лучшего значения для этого параметра, или изменения его в ходе обучения.

Правило, по которому обучалась нейронная сеть, носит название «алгоритм обратного распространения ошибки». Главная идея этого алгоритма заключается в следующих двух этапах.

Первый этап. Сеть получает на вход вектор из выборки и в направлении от входа сети к ее выходу проводит с ним расчеты, получая на выходе выходной вектор.

Второй этап. Сеть находит вектор ошибки на выходе сети, после чего пропускает этот вектор аналогично, только в обратном порядке, от выхода сети к ее входу. Тем не менее, на вектор также действуют все пороговые весовые коэффициенты нейронов, а также весовые коэффициенты, связывающие нейроны разных слоев. В результате, на каждом слое, каждый из нейронов имеет некоторый вектор ошибки, рассчитанный специальным образом, корректирующий лишь ту погрешность, которую мог внести отдельный нейрон отдельного слоя.

В основе данного правила обучения лежит метод градиентного спуска, поэтому для успешной реализации алгоритма необходимо, чтобы все

функции активации нейронной сети были дифференцируемы. Формулы, по которым производится обучение ИНС, представлены ниже:

$$y_j^i = f\left(\sum_{k=1}^{IN} w_{j,k}^i y_k^{i-1}\right); IN = KN_{i-1}; j = \overline{1, OUT}; OUT = KN_i; i = \overline{1, Kol_Sl}. \quad \text{По}$$

данной формуле производятся преобразования входного вектора i -го слоя ИНС в выходной. Здесь IN – размерность входного вектора, KN_i – количество нейронов i -го слоя ИНС, Kol_Sl – общее количество слоев ИНС, $w_{j,k}^i$ – весовой коэффициент i -го слоя, соединяющий j -й нейрон i -го слоя с k -м нейроном $i-1$ -го слоя.

$e_j^i = d_j^i - y_j^i; j = \overline{1, OUT}; OUT = KN_i; i = \overline{1, Kol_Sl}$. По данной формуле производится вычисление ошибки выходного слоя ИНС. l – порядковый номер вектора из выборки, e_j^l – j -я компонента вектора ошибки i -го слоя, d_j^l – j -я компонента вектора точного решения на выходе сети, y_j^i – j -я компонента выходного вектора сети на i -ом слое.

Формула для расчета ошибки для каждого слоя ИНС, по алгоритму обратного распространения ошибки имеет вид:

$$e_j^i = \sum_{k=1}^{OUT} (w_{j,k}^i)' e_k^{i+1}; j = \overline{1, IN}; i = \overline{1, Kol_Sl} - 1.$$

η – параметр скорости обучения сети.

Формула для корректировки весовых коэффициентов, функция активации которых является сигмоидом имеет вид:

$$w_{j,k}^{i+1} = w_{j,k}^i + \eta e_j^i y_j^i (1 - y_j^i) y_k^{i-1}; k = \overline{1, IN}; j = \overline{1, OUT}; i = \overline{1, Kol_Sl}. \quad \text{Здесь}$$

множитель $y_j^i (1 - y_j^i)$ есть первая производная от сигмоида. При использовании линейной функции на выходном слое, этот множитель заменяется единицей.

При реализации нейронной сети было замечено, что если не использовать пороговое смещение нейронов, при входном нулевом значении на выходе сети тоже получался ноль. Значит, решение должно проходить через точку $(0, 0)$, но это недопустимо, ведь если даже область «преломления» будет иметь нулевую длину, это не значит, что потенциал не изменится, если же и подобласть вне этой области. В связи с этим, попытка аппроксимировать прямую линейной нейронной сетью без использования порогового смещения нейронов, не приводила к качественному результату. Сеть пыталась минимизировать ошибку по всей выборке, но

строила аппроксимируемую прямую, проходящую через точку $(0, 0)$ (рис. 5).

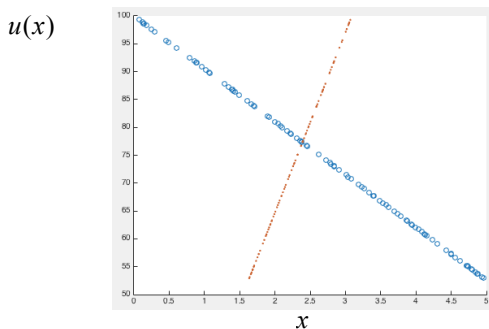


Рис. 5. Неиспользование порогового смещения в линейной ИНС

При использовании нелинейной ИНС кривая могла изогнуться, пройдя и через точку $(0, 0)$ и по прямой, представленной выборкой. Однако нелинейная сеть не достаточно хорошо аппроксимировала прямую, поэтому целесообразно было использовать линейную функцию активации на всех нейронах сети, а также пороговые смещения всех нейронов всех слоев сети.

Работа выполнена по Государственному заданию Министерства образования и науки РФ, №5.628.2014/К.

Литература

1. Пеккер Я.С. Электроимпедансная томография. Томск : Изд-во НТЛ, 2004. 298 с.
2. Ratajewicz-Mikolajczak E., Shirkoohi G.H., Sikora J. Two ANN reconstruction methods for electrical impedance tomography. IEEE Trans // On Magnetics. 1998. № 34. P. 2964–2967.

Разностные схемы решения уравнения переноса, использующие интерполяционные многочлены

А.А. Семёнова

Томский государственный университет

E-mail: siriys.tomsk@mail.ru

Данная работа посвящена разработке численного метода высокого порядка точности для решения уравнения конвекции-диффузии. Поставленная задача решается с помощью интерполяционных многочленов: многочлена Лагранжа и сплайн-функции.

Ключевые слова: уравнение конвекции-диффузии, многочлены, ENO-схема, интерполяционный сплайн.

В настоящее время важной сферой получения новых знаний является математическое моделирование. Особое место занимает математическое моделирование в решении задач, связанных с проблемами экологии. В ряде таких задач требуется исследование процессов в движущихся средах, включающих диффузионный и конвективный перенос.

Целью данной работы является построение монотонных разностных схем повышенной точности, основанных на интерполяционных многочленах, для численного решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии.

Физическая постановка задачи заключается в нахождении значения концентрации примеси в точках области $[0, H]$ в определенный момент времени.

В случае, когда конвективная и диффузионная составляющие осей ОУ и ОZ пренебрежимо малы, такой перенос можно описать одномерным дифференциальным уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \Phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = R(x, t),$$
 где $u(x, t)$ – вектор скорости воздушного потока $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right)$, $D > 0$ – коэффициент диффузии, $R(x, t)$ – источник

вещества концентрации Φ . Слагаемое $\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \Phi)$ отвечает за кон-

вективный перенос, а слагаемое $\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$ соответствует переносу вещества диффузией [1].

Для упрощения модели полагаем, что вектор скорости воздушного потока и диффузия постоянны в рассматриваемой области. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + R(x, t).$$

Задача рассматривается в области $\Omega = \{0 < x < H\}$ с границей $\partial\Omega = \{x = 0, x = H\}$, где $t \in [0, T]$.

Начальное и граничные условия для данной задачи имеют следующий вид:

$$t = 0, \Phi(0, x) = \Phi_{00}(x), x = 0, \Phi(t, 0) = \Phi_0(t), x = H, \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Для построения разностной схемы применялся метод конечного объёма (МКО) [4], рассматриваемый на равномерной сетке.

Заметим, что МКО обеспечивает сохранение законов баланса не только для конечного объёма, но и для всей области в целом.

Основная идея этого метода заключается в разбиении расчётной области на несколько непересекающихся конечных объёмов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном конечном объёме. Затем дифференциальное уравнение интегрируется по конечному объёму, используя формулы численного интегрирования.

В конечном итоге имеется дискретный аналог исходного дифференциального уравнения, в который входят значения концентрации в нескольких узлах сетки.

В данной работе рассматривается численное решение упрощённого уравнения переноса. Для построения разностной схемы интегрируем обе части этого уравнения по времени и по конечному объёму, который представляет собой ячейку вычислительной сетки.

При этом значения всех членов уравнения некоторым образом выражаются через значения сеточного аналога функции $\Phi(x, t)$, определённого в центрах ячеек сетки.

Собирая воедино разностные аналоги начального и граничных условий, а также самого уравнения, получаем следующую разностную схему:

$$\begin{cases} \Phi_i^0 = \Phi_{00}(x_i), \\ \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\tau} + u \frac{\Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n}{h} = D \frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{h^2} + R_i^n, \\ \Phi_0^{n+1} = \Phi_0(t^{n+1}), \\ \Phi_N^{n+1} = \Phi_{N-1}^{n+1}. \end{cases}$$

Отметим, что в работе рассматривались несколько вариантов аппроксимации конвективного члена уравнения переноса: ENO-схема и монотонная сплайн-интерполяция.

Одним из подходов повышения порядка аппроксимации по времени и пространству является ENO-схема (essentially non-oscillatory) [5]. Основная идея ENO-схем состоит в использовании адаптивной процедуры для выбора наиболее подходящего конечно-разностного шаблона при аппроксимации потоков на гранях рассматриваемой ячейки сетки с использованием многочленов Лагранжа, по возможности избегающей добавления узлов с резким изменением значений сеточной функции.

Пусть требуется найти решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ v(0, x) &= v_0(x); \end{aligned}$$

где $v_0(x)$, $u(x)$ известны.

Согласно рассматриваемому методу мы строим сетку, интегрируем исходное уравнение по конечному объёму, затем аппроксимируем уравнение следующей консервативной схемой:

$$\bar{v}_i(t^{n+1}) - \bar{v}_i(t^n) = -\frac{1}{\Delta x_i} \left(\tilde{f}_{i+1/2} - \tilde{f}_{i-1/2} \right) \cdot (t^{n+1} - t^n);$$

где $\bar{v}_i(t)$ – численная аппроксимация осредненной по ячейке функции $\bar{v}(t, x_i)$, а численное значение потока $\tilde{f}_{i+1/2}$ определяется как:

$\tilde{f}_{i+1/2} = h(v_{i+1/2}^-, v_{i-1/2}^+)$, по значениям $v_{i+1/2}^\pm$, получаемым по ENO реконструкции.

Функция двух аргументов h является монотонизированным потоком $f = u \cdot v$. В данной работе рассматривался монотонизатор Годунова:

$$h(a, b) = \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} f(u), & a \leq b \\ \max_{b \leq u \leq a} f(u), & b < a \end{cases}$$

Затем вычисляем разделённые разности для первообразной ($V'(x) = v(t^n, x)$) по формулам:

$$V \left[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+j-1/2} \right] \equiv \frac{V \left[x_{i+1/2}, \dots, x_{i+j-1/2} \right] - V \left[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+j-3/2} \right]}{x_{i+j-1/2} - x_{i-1/2}} = \bar{v}_i$$

где $j = 1, \dots, k$; k – порядок схемы.

В ячейке I_i начнём с двухточечного шаблона $S_2(i) = \{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\}$ для первообразной $V(x)$, который эквивалентен одноточному шаблону $S_1(i) = \{I_i\}$ для \bar{v}_i . Причём для каждой точки $x_{i+1/2}$ существует два варианта двухточечного шаблона $S_2(i) = \{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\}$ и $S_2(i) = \{x_{i+1/2}, x_{i+3/2}\}$.

Для $l = 2, \dots, k$ рассмотрим шаблон $S_l(i) = \{x_{i+1/2}, \dots, x_{i+l-1/2}\}$. Добавим к нему одну из соседних точек $x_{i-1/2}$ или $x_{i+l+1/2}$ согласно следующему ENO-алгоритму: если $\left| V \left[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+l-1/2} \right] \right| < \left| V \left[x_{i+1/2}, \dots, x_{i+l+1/2} \right] \right|$, то добавляем к шаблону точку $x_{i-1/2}$, иначе добавляем точку $x_{i+l+1/2}$.

Используя интерполяцию многочленами Лагранжа для выбранного шаблона, получим значения потоков.

Другим подходом к решению поставленной задачи были весовые кубические сплайн-функции (сплайны) [2].

Предпосылкой к использованию сплайн-функций при решении данной задачи послужил следующий пример: дана табличная функция, имеющая 4 узла. Требовалось восстановить значения в промежуточных точках (т.е. интерполировать функцию).

Эта задача решалась с помощью многочлена Лагранжа третьей степени. Данный метод давал большую погрешность. Затем эта задача была решена с помощью кубического весового интерполяционного сплайна, веса которого были заданы единицами. Метод дал меньшую погрешность. Затем применился сплайн, веса которого подбирались по алгоритму, описанному в [1]. Последний способ дал наилучший результат: решение имело наименьшую погрешность и было монотонно и неотрицательно.

Результаты решения данной задачи представлены на рис. 1.

При решении задачи данным методом все вычисления проводились аналогично ENO-схеме, но вместо многочленов Лагранжа во всех рассуждениях использовались сплайны [3].

В результате теоретических выкладок получили следующий вид искомой интерполяционной функции:

$$s(x) = h \cdot \left[\bar{v}_{i-r} \cdot (c'_1 + c'_2 + c'_3) + \bar{v}_{i-r+1} \cdot (c'_2 + c'_3) + \bar{v}_{i-r+2} \cdot c'_3 \right],$$

где c'_1, c'_2, c'_3 – некоторые коэффициенты.

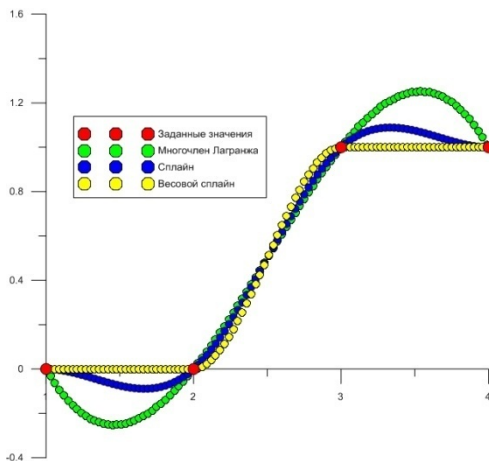


Рис. 1. Интерполяция таблично-заданной функции многочленами

В данной работе были исследованы методы построения схем высокого порядка аппроксимации для численного решения уравнения переноса. Была изучена схема ENO, которая позволяет получать аппроксимацию по пространству до 6-ого порядка. Аналогичным способом была получена разностная схема с использованием кубического интерполяционного сплайна, построенного через наклоны. Основными требованиями к предъявляемым решениям были монотонность и неотрицательность. Выполнения этих требований удалось добиться при использовании монотонизаторов потока. Теоретические исследования показывают, что схема с применением сплайна даёт более точные результаты.

Построенная ENO-схема высокого порядка аппроксимации была применена к исходной задаче адвективно-диффузионного переноса примеси с целью повышения аппроксимации численного решения.

В ходе работы была написана программа решения задачи переноса примеси на языке программирования высокого уровня (ЯПВУ) Fortran 90. Алгоритмы ENO и сплайна были записаны как подпрограммы.

Благодаря тому, что построенная разностная схема является явной, в дальнейшем для данной задачи можно получить эффективную параллельную программу для кластерной системы.

Работа выполнена по Государственному заданию Министерства образования и науки РФ №5.628.2014/К.

Литература

1. Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 360 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций / под ред. Н.Н. Яненко. М. : Наука, 1980. 352 с.
3. Берцун В.Н. Сплайны сеточных функций. Томск : ТМЛ-Пресс, 2007. 133 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 552 с.
5. Chi-Wang Shu. Essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // Preprint of Division of Applied Mathematics. BrownUniversity. 1996. 92 p.

Параметризация тепло- и влагообмена на поверхности земли и в почве для одномерной модели атмосферного пограничного слоя

М.В. Терентьева, Г.И. Ситников

Томский государственный университет
E-mail: mariya-terenteva@mail.ru

Произведено усовершенствование имеющейся одномерной модели атмосферного пограничного слоя (АПС) для улучшения качества прогноза локальных погодных условий вблизи населенных пунктов и крупных транспортных узлов, путем внедрения новой схемы параметризации процессов взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью и деятельным слоем почвы.

Ключевые слова: атмосферный пограничный слой, моделирование атмосферных процессов, тепло- и влагообмен.

Для достоверного моделирования состояния атмосферы важную роль играют процессы, протекающие на подстилающей поверхности и в деятельном слое суши, оказывающие существенное влияние на термический режим и влагообмен в нижней тропосфере. Деятельный слой почвы играет ключевую роль как резервуар влаги, контролирующей, в частности, испарение.

Произведена модификация имеющейся одномерной микромасштабной метеорологической модели высокого разрешения [1] путем включения схемы параметризации ISBA (Interaction Soil Biosphere Atmosphere), разработанной J. Noilhan и S. Planton [2]. Эта схема описывает обмен тепла и воды между нижним уровнем атмосферы, растительностью и почвой. Так как ISBA была разработана для метеорологических моделей, это относительно простая схема, но она охватывает наиболее важные компоненты процессов, происходящих на поверхности земли. Простота схемы достигается за счет калибровки нескольких важных коэффициентов с более сложных моделей и экспериментальных данных.

Схема включает в себя обработку теплосодержания почвы, содержание влаги в почве, воду, перехваченную растительностью и аэродинамические процессы переноса в приземном слое атмосферы. Схема использует модель восстановления тепла и содержания воды в почве и модель испарения. Другие важные особенности схемы включают в себя представление гравитационного дренажа, введение теплоемкости почвы / растительности C_T и калибровки восстановительных коэффициентов (для содержания воды) с многослойной моделью почвенной влаги.

В модели ISBA пять прогностических уравнений для температуры почвы на глубине, T_2 , содержания воды в почве на глубине, w_2 , температуры на поверхности почвы/растительности, T_s , содержания воды на поверхности почвы, w_g и перехвата воды, задержавшейся на поверхности, W_r .

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = C_T(R_n - H - LE) - \frac{2\pi}{\tau}(T_s - T_2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{\tau}(T_s - T_2), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w_g}{\partial t} = \frac{C_1}{\rho_w d_1}(P_g - E_g) - \frac{C_2}{\tau}(w_g - w_{geq}); \quad 0 \leq w_g \leq w_{sat} \quad (3)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho_w d_2}(P_g - E_g - E_{tr}) - \frac{C_3}{d_2 \tau} \max[0., (w_2 - w_{fc})]; \quad 0 \leq w_2 \leq w_{sat} \quad (4)$$

$$\frac{\partial W_r}{\partial t} = \text{veg}P - (E_v - E_{tr}) - R_r; \quad 0 \leq W_r \leq W_{rmax} \quad (5)$$

где veg – доля растительного покрова.

Только один энергетический баланс рассматривается для всей системы поверхность-растительность. Как результат, переходы тепла и массы между поверхностью и атмосферой связаны со средними значениями T_s и w_g .

Радиационный баланс на поверхности есть сумма поглощенных частей поступающего солнечного излучения R_G и атмосферного инфракрасного излучения R_A , уменьшенная на излучаемое ИК-излучение:

$$R_n = R_G(1 - \alpha_t) + \epsilon_t(R_A - \sigma T_s^4) = H + LE + G \quad (6)$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана, H – турбулентный поток тепла, LE – поток скрытого тепла, и G – поток тепла в почву.

Турбулентные потоки рассчитываются с помощью классических аэродинамических формул. Для потока явного тепла:

$$H = \rho_a C_p C_H V_a (T_s - T_a), \quad (7)$$

где C_p – удельная теплоемкость воздуха; ρ_a , V_a , и T_a обозначают соответственно плотность воздуха, скорость ветра, и температуру на самом низком уровне атмосферы; и C_H коэффициент сопротивления в зависимости от термической стабильности атмосферы. Поток испарения воды E определяется, как сумма испарения с поверхности почвы (т.е., E_g) и от растительности (т.е. E_v):

$$LE = LE_g + LE_v \quad (8)$$

$$E_g = (1 - \text{veg})\rho_a C_H V_a [h_u q_{sat}(T_s) - q_a] \quad (9)$$

$$E_v = \text{veg}\rho_a C_H V_a h_u [q_{sat}(T_s) - q_a] \quad (10)$$

где L – скрытая теплота парообразования, $q_{\text{sat}}(T_s)$ – насыщенная влажность при температуре T_s , и q_a – влажность на самом низком уровне атмосферы.

Относительная влажность h_u на поверхности земли связана с поверхностной влажностью почвы w_g следующим образом:

$$h_u = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{w_g}{w_{fc}} \pi \right) \right], \quad \text{если } w_g < w_{fc} \quad (11)$$

$$h_u = 1, \quad \text{если } w_g \geq w_{fc} \quad (12)$$

где w_{fc} – объемное содержание влаги в почве.

В случае потока росы, когда $q_{\text{sat}}(T_s) < q_a$, h_u также устанавливается равной 1. Когда поток E_v поднимается вверх от поверхности в атмосферу, коэффициент Хэлстида h_v учитывает прямое испарение E_r от части δ листы, покрытой перехваченной водой, а также транспирации E_{tr} оставшейся части листьев:

$$h_v = (1 - \delta) \frac{R_s}{R_a + R_s} + \delta \quad (13)$$

$$E_r = \text{veg} \frac{\delta}{R_a} [q_{\text{sat}}(T_s) - q_a] \quad (14)$$

$$E_{tr} = \text{veg} \frac{1 - \delta}{R_a + R_s} [q_{\text{sat}}(T_s) - q_a] \quad (15)$$

Когда E_v направлен вниз из атмосферы на поверхность (поток росы), h_v принимается равным 1.

Следуя Deardorff J.W. [3], δ есть степенная функция содержания влаги в области ее перехвата:

$$\delta = (W_r / W_{r \max})^{2/3} \quad (16)$$

Аэродинамическое сопротивление $R_a = (C_H V_a)^{-1}$. Поверхностное сопротивление, R_s , зависит как от атмосферных факторов, так и от имеющихся водных ресурсов в почве.

Задача (1) – (5) вместе с начальными условиями решалась численно конечно-разностным методом. Дискретный аналог дифференциальной задачи (1) – (5) строился с первым порядком аппроксимации по времени. Использовалась абсолютно устойчивая схема.

Рассмотрены метеорологические условия в г. Томск (координаты $56^\circ, 29$ с. ш., $84^\circ, 57$ в. д.) на 27 августа 2012г. (время мест.). Использованы данные метеонаблюдений на гидрометеорологической станции в аэропорту Богашево (ГМС Богашево, координаты $56^\circ, 419$ с. ш. $85^\circ, 244$ в. д.).

В качестве начальных условий для модели использовались результаты расчетов по крупномасштабной модели ГУ Гидрометцентра России ПЛАВ [4]. Результаты – прогностические данные профилей метеовеличин – выдавались ежечасно. Рассчитывался вертикальный профиль атмо-

сферы от поверхности Земли до высоты 2,5 км, в котором использовалась неравномерная вертикальная сетка из 100 уровней, сгущающихся к земной поверхности.

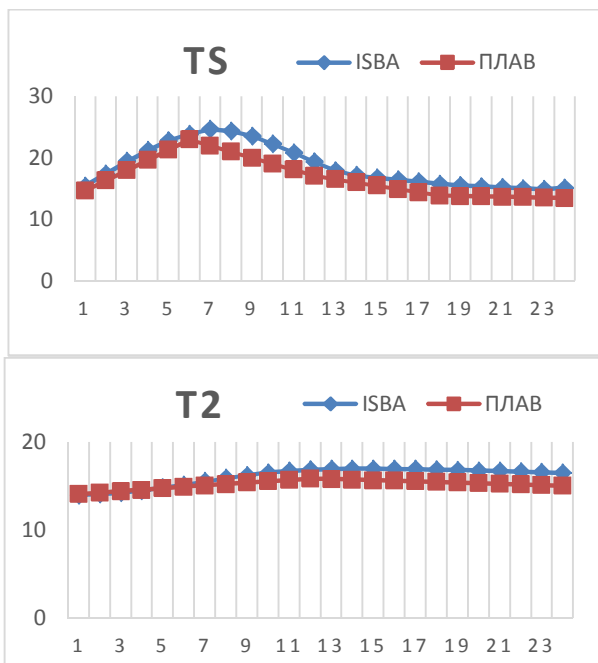


Рис. 1. Рассчитанные значения температуры почвы на глубине, T_2 , температуры в поверхностном слое почвы, T_s , в районе аэропорта Богашево 27 августа 2012 г.

Результаты разработанной модели сравниваются с расчетами по крупномасштабной модели ГУ Гидрометцентра России ПЛАВ.

27 августа 2012 г. На рис. 1 представлено сопоставление рассчитанных по одномерной модели однородного АПС и по модели ПЛАВ ГУ Гидрометцентра России значения температуры в поверхностном слое почвы (глубина 0,1 м) и температуры почвы на глубине 2 м в течение суток 27 августа 2012 г.

Сопоставление показывает хорошую согласованность динамики суточного изменения температуры в поверхностном слое почвы, T_s , и температуры почвы на глубине, T_2 . Наблюдаются отклонения для T_s – до $3,5^\circ$, для T_2 – до $1,4^\circ$.

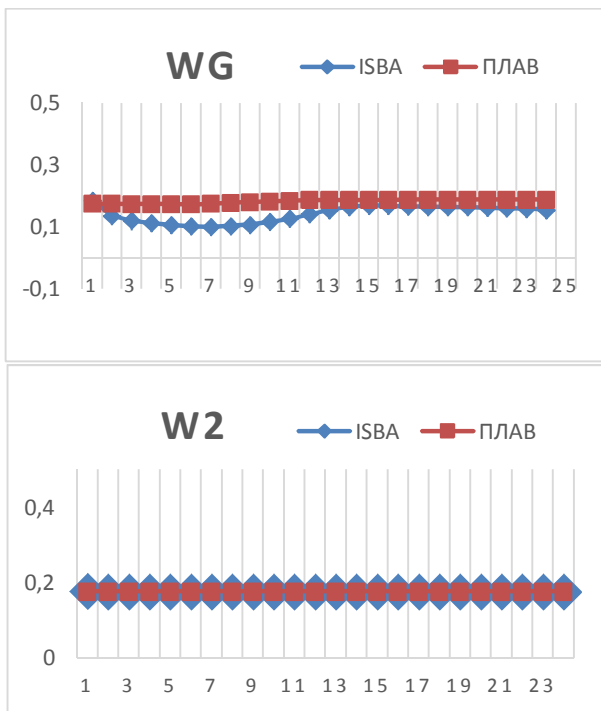


Рис. 2. Рассчитанные значения содержания воды в почве на глубине, w_2 , содержания воды в поверхностном слое почвы, w_g , в районе аэропорта Богашево 27 августа 2012 г.

На рисунке 2 представлено сопоставление рассчитанных по одномерной модели однородного АПС и по модели ПЛАВ ГУ Гидрометцентра России значений содержания воды в поверхностном слое почвы (глубина 0,1 м) и содержания воды в почве на глубине 2 м в течение суток 27 августа 2012 года.

Сопоставление показывает хорошую согласованность динамики суточного изменения содержания воды на поверхности почвы, w_g , и содержания воды в почве на глубине, w_2 . Наблюдаются отклонения для w_g — до $0,09 \text{ м}^3 \text{ м}^{-3}$, для w_2 — до $0,0006 \text{ м}^3 \text{ м}^{-3}$.

В целом, можно отметить, что расчеты суточного изменения температуры почвы на глубине, T_2 , содержания воды в почве на глубине, w_2 , температуры в поверхностном слое почвы, T_s , содержания воды на по-

верхности почвы, w_g и перехвата воды, задержавшейся на поверхности, W_r по одномерной модели АПС и по модели ПЛАВ ГУ Гидрометцентра России качественно сопоставимы. Тем не менее, при количественном сравнении наблюдаются некоторые отклонения. Это можно объяснить недостатком необходимых данных по составу и характеристикам почвы и ее поверхности в месте, для которого проводились расчеты.

Работа выполнена по Государственному Заданию Министерства образования и науки РФ, №5.628.2014/К.

Литература

1. Terenteva M.V. Homogeneous boundary layer model for forecasting of atmospheric processes nearby airport / Grigory I. Sitnikov , Alexander V. Starchenko // Proc. SPIE 9292, 20th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 92924E (November 25, 2014); doi:10.1117/12.2075248
2. J. Noilhan, The ISBA land surface parameterisation scheme // *Global and Planetary Change*, 13 (1996), pp. 145–159.
3. Deardorff, J.W., 1978. Efficient prediction of ground surface temperature and moisture with inclusion of a layer of vegetation. *J. Geophys. Res.*, 20: 1889–1903.
4. Толстых М.А., Булдовский Г.С. Усовершенствованный вариант глобальной полулагранжевой модели прогноза полей метеоэлементов в версии с постоянным разрешением заблаговременностью до 10 суток и результаты его оперативных испытаний // *Фундаментальные и прикладные гидрометеорологические исследования*. СПб. : Гидрометеоздат, 2003. С. 24–47.

Исследование модели типа «реакция-диффузия» с использованием явной схемы и схемы Кранка-Николсон

Р.Ю. Уколов, Н.Н. Меркулова

Томский государственный университет

E-mail: roman_ukolov@bk.ru

Изучена модель типа «реакция-диффузия» с помощью явной схемы и схемы Кранка-Николсон. Схемы исследованы на аппроксимацию, устойчивость, сходимость. Численное решение оформлено в виде графиков, демонстрирующих характер поведения концентраций реагирующих веществ с течением времени.

Ключевые слова: математическая модель, явная схема, схема Кранка-Николсон, аппроксимация, устойчивость, сходимость.

Математические модели, которые описываются системой квазилинейных уравнений типа «реакция-диффузия», широко используются в биологии, экологии, экономике. Этими уравнениями можно задать распространение нервных импульсов, популяций растений и животных, волн эпидемий и другие эволюционные процессы [1–5].

Например, в работе [2] для системы типа «реакция-диффузия» исследуется характер наработки активатора при малом времени и в зависимости от начальных условий. В [3] рассматриваются условия, при которых в системах уравнений типа «реакция-диффузия» возникает «диффузионный резонанс» и резонансные явления.

В данной работе с помощью теории разностных схем изучается модель типа «реакция-диффузия», описывающая взаимодействие двух реагирующих веществ.

Классическая модель типа «реакция-диффузия» имеет вид [6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1(u, v); \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_2(u, v); \end{cases} \quad (1)$$

где $\begin{cases} f_1(u, v) = a + u^2v - (b + 1)u; \\ f_2(u, v) = bu - u^2v. \end{cases}$

Здесь $u(x, t)$ и $v(x, t)$ – концентрации двух реагирующих веществ, D_u и D_v – коэффициенты диффузии, a и b – параметры реакции, x – пространственная переменная, t – временная переменная.

Физически задача (1) описывает реактор с непроницаемыми стенками длины l . Считаем, что в момент времени $t = 0$ известны начальные концентрации $u(x, 0)$, $v(x, 0)$; $x \in [0, l]$ и заданы граничные условия.

Допустим, что реактор имеет достаточно малый объём и время усреднения реакции по объёму за счёт диффузии много меньше характерного времени всей реакции. Тогда процесс будет протекать во всех точках объёма одинаково во времени, и будет описываться системой ОДУ

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a + u^2v - (b+1)u; \\ \frac{dv}{dt} = bu - u^2v; \end{cases} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(0) &= 1; \\ v(0) &= 1. \end{aligned}$$

Для определения параметров a и b находятся стационарные решения системы. С этой целью правые части (2) приравняются к нулю. Получается стационарное решение:

$$\begin{cases} u_{cm} = a; \\ v_{cm} = \frac{b}{a}. \end{cases} \quad (3)$$

Стационарное решение (3) исследуется на устойчивость [7]: производится линеаризация системы ОДУ (2) вблизи стационарного решения; строится характеристическое уравнение, и определяются его корни. Из требования отрицательности вещественных частей корней получается зависимость b от a :

$$\begin{cases} b > (a+1)^2; \\ b < (a-1)^2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b < (a+1)^2; \\ b > (a-1)^2. \end{cases}$$

В дальнейшем полученные неравенства позволяют подбирать значения a и b при проведении численных расчётов.

Модель типа «реакция-диффузия» исследуется с помощью явной схемы и схемы Кранка-Николсон.

В области $\overline{G} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ определяется решение $u(x, t), v(x, t) \in C_2^1(G) \cap C_1(\overline{G})$.

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 1; \\ v(x, 0) = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Явная схема (схема 1) записывается на равномерной сетке в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = D_u \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f_1(u_j^n, v_j^n); \\ \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = D_v \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} + f_2(u_j^n, v_j^n); \end{cases} \quad (6)$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} u_j^0 = 1; \\ v_j^0 = 1. \end{cases} \quad (7)$$

$$j = \overline{0, M}.$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= u_1^{n+1}; & u_M^{n+1} &= u_{M-1}^{n+1}; & n &= \overline{0, N-1}. \\ v_0^{n+1} &= v_1^{n+1}; & v_M^{n+1} &= v_{M-1}^{n+1}; & & \\ M &= \frac{l}{h}; & N &= \frac{T}{\tau}. \end{aligned} \quad (8)$$

Разностная схема (6)–(8) исследована на аппроксимацию, устойчивость, сходимость. Показано, что суммарная аппроксимация имеет первый порядок по времени и по пространству. Схема 1 условно устойчива по начальным данным. Условие устойчивости имеет вид:

$$0 \leq \tau \leq \frac{h^2}{2D_u}; \quad 0 \leq \tau \leq \frac{h^2}{2D_v}.$$

Дифференциальная задача (1), (4)-(5) исследована с помощью схемы Кранка-Николсон (схема 2) [8]. Система разностных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{D_u}{2h^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + f_1(u_j^n, v_j^n); \\ \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = \frac{D_v}{2h^2} (v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1} + v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + f_2(u_j^n, v_j^n); \end{cases} \quad j = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (9)$$

Начальные и граничные условия определяются по формулам (7)-(8).

Разностная схема Кранка-Николсон исследована на аппроксимацию, устойчивость, сходимость. Получено, что аппроксимация имеет первый порядок по времени и второй порядок по пространству. Схема является абсолютно устойчивой по начальным данным.

По построенным разностным схемам был проведён вычислительный эксперимент на компьютере при следующих значениях параметров: $a = 1.1$, $b = 0.1$ и $a = 0.1$, $b = 1.1$, $D_u = 0.01$, $D_v = 0.01$. Задавалось значение количества узлов по времени $N = 40$ и по пространству $M = 10$.

Результаты оформлены в виде графиков в Microsoft Excel и демонстрируют характер поведения гормона роста $u(x, t)$ и ингибитора $v(x, t)$ в сечении $x = 0.1$ с течением времени.

На рис. 1 изображен график функций $u(0.1, t)$ и $v(0.1, t)$ при значениях $a = 1.1$, $b = 0.1$, вычисленных с помощью схемы Кранка-Николсон и явного метода. Из графика видно, что гормон роста $u(0.1, t)$ на графике возрастает до значений 1.53. Значения ингибитора $v(0.1, t)$ убывают монотонно, в пределах от 1 до 0.2. Поведение функций, вычисленное с помощью явной схемы и схемы Кранка-Николсон одинаковое.

Различие между численными решениями по схеме Кранка-Николсон и явному методу показывает поведение погрешности (рис. 2), где изображён модуль разности между решениями в одних и тех же точках сетки.

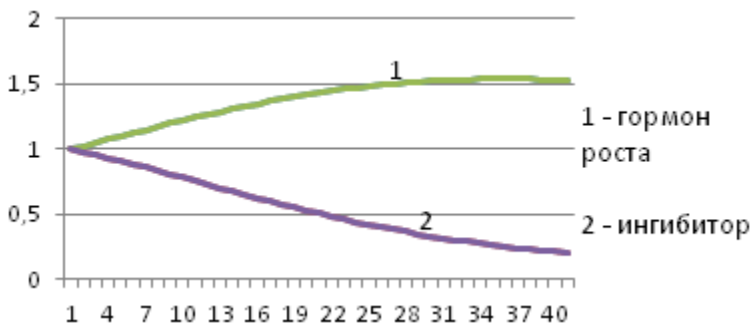


Рис. 1. Характер поведения концентрации реагирующих веществ, полученный по схемам 1, 2 в сечении $x = 0.1$ с течением времени при $a = 1.1$, $b = 0.1$

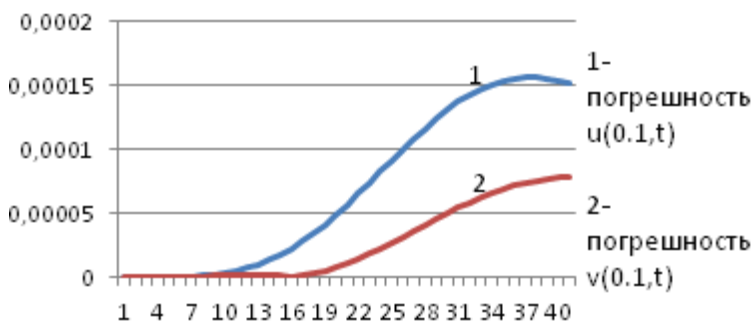


Рис. 2. Погрешность результатов, полученных по схемам 1, 2 при $a = 1.1$, $b = 0.1$

Видно, что погрешность наблюдается в четвёртом знаке после запятой для функций $u(0.1,t)$, $v(0.1,t)$. При этом значения погрешности равны нулю в первых 8 точках и далее незначительно возрастают, достигают максимума в 4 знаке после запятой и убывают в последних узлах. Кривые U_abs и V_abs означают модуль разности значений функций, полученных вышеупомянутыми методами. Погрешность функции $u(x,t)$ не превосходит 0,00016. Погрешность функции $v(x,t)$ не превосходит 0,00008.

При других значениях $a = 0.1$, $b = 1.1$ получаются следующие результаты (рис. 3).

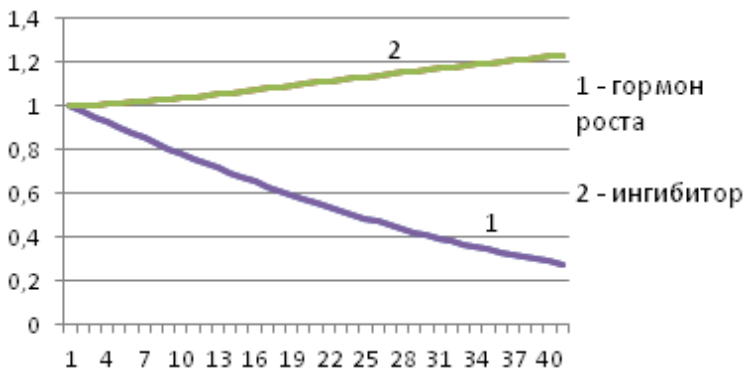


Рис. 3. Характер поведения концентрации реагирующих веществ, полученный по схемам 1, 2 в сечении $x = 0.1$ с течением времени при $a = 0.1$, $b = 1.1$

На рис. 3 показано, что наблюдается рост ингибитора выше значения 1.2 и убывание значений гормона роста до значения 0.27. Здесь так же поведение функций, вычисленное с помощью явной схемы 1 и схемы 2 Кранка-Николсон, имеет одинаковый характер.

Поведение погрешности полученных результатов представлено на рис. 4.

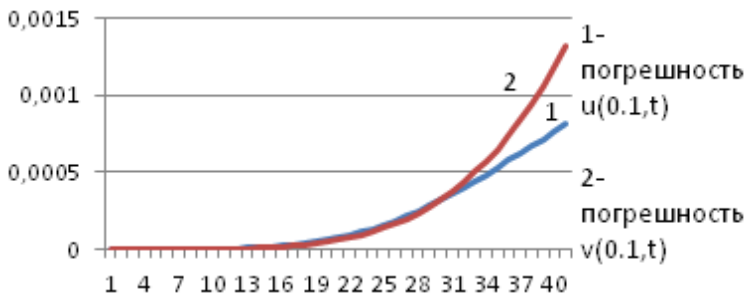


Рис. 4. Погрешность результатов, полученных по схемам 1, 2 при $a = 0.1$, $b = 1.1$

Погрешность наблюдается в третьем знаке после запятой у гормона роста и у ингибитора. Максимальное значение погрешности для $v(0.1,t)$ не превышает 0.0014, а для $u(0.1,t)$ – 0.0008. Характер поведения погрешности отражает процесс вычислений: в первых точках погрешность равна нулю, а к концу расчётов возрастает.

Таким образом, в данной работе изучена модель типа «реакция-диффузия» с помощью явной схемы и схемы Кранка-Николсон. Схемы 1, 2 исследованы на аппроксимацию, устойчивость, сходимости. Для вычисления значений $u(x,t)$, $v(x,t)$ были написаны программы на языке программирования высокого уровня. Численное решение оформлено в виде графиков, демонстрирующих характер поведения концентраций реагирующих веществ с течением времени.

Настоящая работа может быть полезна тем, кто занимается изучением математических моделей биофизики и решением задач математической физики.

Литература

1. Мартинсон А.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
2. Лобанов А.И., Старожилова Т.К. Качественное исследование начального этапа формирования неравновесных структур в модели типа «реакция-диффузия» // Матем. моделирование 1997. Т. 19, № 12. С. 3–15.
3. Лобанов А.И., Старожилова Т.К., Черняев А.П. Резонансные явления в системах типа «реакция-диффузия» // Матем. моделирование 1999. Т. 11, № 7. С. 75–82.
4. Полянин А.Д. Точные решения нелинейных систем уравнений диффузии реагирующих сред и математической биологии // ДАН. 2005. Т. 400, № 5. С. 606–611.
5. Полянин А.Д., Вязьмина Е.А. Новые классы точных решений нелинейных систем уравнений реакционно-диффузионного типа // ДАН. 2006. Т. 409, № 6. С. 455–460.
6. Полякова М.С. О диссипативных структурах в одной модели химической реакции с диффузией // Вестник московского университета. 1974. № 6. С. 643–648.
7. Корн Г.А., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров : определения, теоремы, формулы / под общ. ред. И.Г. Арамановича. СПб. : Лань, 2003. 831 с.
8. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М. : Мир, 1972. 420 с.

Статистическое исследование эпистемологических установок студентов в кросс-культурном контексте

И.А. Бондаренко, Е.А. Пчелинцев

Томский государственный университет
E-mail: star_irish@bk.ru

Рассматривается статистический анализ психодиагностических данных с целью выявления кросс-культурных различий в эпистемологических установках студентов одного из университетов России и одного из университетов Нидерландов. В качестве диагностического материала используется опросник, направленный на исследование эпистемологической оценки математического и психологического знания. В ходе исследования выявлено статистически значимое различие в эпистемологических установках на выборках студентов из России и Нидерландов.

Ключевые слова: *опросники, психодиагностические данные, эпистемологические установки, факторный анализ, надежность шкал, одномерный дисперсионный анализ, критерий Манна–Уитни, надежность шкалы.*

Введение

Статистический анализ в последние десятилетия находит все более широкое применение в задачах идентификации, прогнозирования и классификации различных данных. Все возрастающая потребность в использовании адекватного математического аппарата при решении исследовательских задач в гуманитарных областях научного знания обусловлена все возрастающей сложностью и многомерностью исследуемых феноменов. Традиционные методы количественного анализа достаточно надежны, однако не позволяют «проникнуть» в динамичный и многомерный мир человека и «проявить» маркеры его индивидуальности или отношения к действительности, которые могут быть значимы в исследованиях ценностно-смысловых установок человека, определяющих его способы взаимодействия с миром и самим собой.

Ориентация развивающейся практики высшего образования на ценности развития человеческого ресурса [1] определяет новое поле исследовательского интереса, включающее эпистемологические установки студентов как условие или ограничение их когнитивного развития [2]. Эпистемологические установки – представление о природе знания и возможностях его усвоения и использования.

Исследование с помощью качественных методов анализа имплицитных теорий, рефлексивных текстов, субъективных оценок позволяет получать представления об уникальности мира человека, однако вопрос о валидности этих представлений остается открытым. В этой связи особую актуальность приобретает поиск адекватных способов математической обработки данных, полученных с помощью качественных методик. Именно в этой логике проведено представленное в данной статье исследование, что определяет его актуальность и значимость полученных результатов для развития теории и практики высшего образования.

Предметом данного исследования являются функциональные возможности многомерных методов математической статистики в исследовании эпистемологических установок студентов.

Целью данного исследования является применение методов математической статистики в решении задач гуманитарного исследования (на примере психологии образования) для выявления факторной структуры диагностического материала и достоверных различий в эпистемологических установках на выборках студентов из России и Нидерландов.

В качестве методов исследования использовались: модифицированная методика семантического дифференциала, критерий χ^2 , критерий Манна–Уитни, факторный анализ, одномерный дисперсионный анализ, многомерное шкалирование, оценка надежности шкал [3].

Обсуждение результатов

С целью выявления кросс-культурных различий в эпистемологических установках российских и нидерландских студентов, обучающихся по направлению «Психология» в отношении математического и психологического знания было проведено анкетирование с использованием пакета опросников, включая опросник коннотативных аспектов эпистемологических установок (САЕВ) [4]. Выборка исследования с учетом исключенных данных в связи с пропущенными значениями составила 229 участников, включая 72 российских студента и 157 студентов одного из нидерландских университетов. После обработки анкет была получена таблица из 229 строк и 50 столбцов. Также был проведен статистический анализ отдельно для двух подвыборок исследования. Численная реализация статистических методов осуществлена в пакете SPSS.

Первым этапом данного исследования было изучение факторной структуры данных, представленной в статье зарубежных исследователей [4]. Для этого применялся факторный анализ с ортогональным вращением [3]. На основе исследования Stahl & Bromme (2007) рассматриваются

такие факторы как: убеждения о простоте знаний, представления об определенности знания, и убеждения об источнике знания. Для каждой шкалы посчитан коэффициент надежности альфа-Кронбаха (MSA). Коэффициент альфа-Кронбаха показывает внутреннюю согласованность характеристик, описывающих один объект. Коэффициент используется в психологии при построении шкал и для проверки их надёжности и вычисляется по формуле:

$$MSA = k(k - 1) \left[1 - \sum_{i=1}^k \frac{s_i^2}{s_{\text{сум}}^2} \right],$$

где s_i^2 – дисперсии для k отдельных позиций, $s_{\text{сум}}^2$ – дисперсия для суммы всех позиций. Чем ближе MSA к единице, тем выше надежность [3].

По общей выборке для математического знания: 1 фактор MSA = 0,556; 2 фактор MSA = 0,106; 3 фактор MSA = 0,521. По общей выборке для психологического знания: 1 фактор MSA = 0,519; 2 фактор MSA = 0,421; 3 фактор MSA = 0,417.

По нидерландской выборке для математического знания: 1 фактор MSA = 0,634; 2 фактор MSA = 0,248; 3 фактор MSA = 0,488. По нидерландской выборке для психологического знания: 1 фактор MSA = 0,593; 2 фактор MSA = 0,488; 3 фактор MSA = 0,368.

По российской выборке для математического знания: 1 фактор MSA = 0,389; 2 фактор MSA = -0,012; 3 фактор MSA = 0,626. По российской выборке для психологического знания: 1 фактор MSA = 0,320; 2 фактор MSA = 0,290; 3 фактор MSA = 0,491.

Из полученных значений MSA можно сделать вывод, что предлагаемая в [4] факторная структура не находит подтверждения на выборках данного исследования. В связи с этим, в ходе статистического анализа данных определен фактор, включающий пункты опросника, которые были получены в результате факторного анализа с выделением двух факторов и совпали для нидерландской и российской выборок. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1
Выделенный фактор – эпистемологическая оценка знаний

Пары прилагательных	Математика	Психология
Объективное – Субъективное	0,700	0,579
Подтверждаемое – Неподтверждаемое	0,767	0,610
Точное – Неточное	0,823	0,824
Абсолютное – Относительное	0,737	0,695
Упорядоченное – Хаотичное	0,819	0,729
Определенное – Неопределенное	0,782	0,709
MSA	0,862	0,781

Выделенный фактор получил название «эпистемологическая оценка знания» и стал основанием для проведения следующего этапа статистической обработки данных – сравнение эпистемологических оценок математического и психологического знания российскими и нидерландскими студентами. Рассмотрев описательные статистики для этих выборок, заметили, что средние по шкале для психологического знания одинаковы, а для математического различны. Для сравнения российской и нидерландской выборок был реализован непараметрический критерий Манна-Уитни, так как он не требует наличия нормального распределения сравниваемых совокупностей и подходит для сравнения малых выборок [3]. Результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты критерия Манна–Уитни

	Критерий	Значение	Решение
Распределение фактора для математического знания	Критерий Манна–Уитни	0,000	Нулевая гипотеза отвергается
Распределение фактора для психологического знания	Критерий Манна–Уитни	0,776	Нулевая гипотеза принимается

Таким образом, для математического знания признается статистическая значимость различия между российской и нидерландской выборками; для психологического знания статистически не значимо различие между данными выборками.

Для психологического знания средние равны 3,6 для российской и нидерландской выборок.

Для математического знания средние равны: 1,64 для российской и 2,01 для нидерландской выборок.

Содержательная интерпретация полученных значений позволяет сделать вывод о том, что математическое знание с точки зрения студентов воспринимается как более стабильное, объективное, точное, упорядоченное и определенное. В то же время можно говорить о некотором дефиците в эпистемологических установках студентов, так как средние значения эпистемологических оценок, соответствующих восприятию знания как рефлексивного и конструируемого в процессе взаимодействия с другими, соответствуют диапазону от 4 до 7.

Дальнейшее сравнение проводилось с помощью однофакторного дисперсионного анализа (ANOVA). Результаты этого анализа указывают на то, что для математического знания средние российской и нидерландской

выборки достоверно различимы ($p = 0,002$), для психологического знания средние российской и нидерландской выборки достоверно не различимы ($p = 0,883$). Что подтверждает выводы по критерию Манна–Уитни.

Таблица 3

Критерий однородности дисперсий

	Статистика Ливиня	Значение
Математическое знание	3,682	0,056
Психологическое знание	3,276	0,072

Для проверки равенства дисперсий применялся критерий Ливиня [3], который более устойчив к нарушению нормальности распределения, чем другие критерии в программе SPSS. Результаты представлены в табл. 3. Таким образом, дисперсии однородны.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что существуют достоверные различия в эпистемологических оценках математического знания и не выявлены различия в эпистемологических оценках психологического знания на выборках студентов из России и Нидерландов.

Полученные результаты позволяют выдвинуть новые рабочие гипотезы о причинах различий и сходства субъективных восприятий и оценок студентов, принадлежащих к различным культурам (в том числе и академическим) в отношении психологического и математического знания.

Общее в эпистемологических оценках психологического знания может объясняться универсальностью эпистемологических установок в отношении гуманитарного знания, или общими особенностями его преподавания вне зависимости от культурного контекста? Тогда чем можно объяснить различие в эпистемологических оценках математического знания как естественно-научного? Особенности преподавания математических дисциплин для психологов? Или различия в эпистемологических оценках обусловлены культурными различиями?

Таким образом, использование методов математической статистики для анализа данных, полученных с помощью качественных методик, позволяет не только проявить особенности восприятия студентами естественно-научного и гуманитарного знания, но и получить основания для выдвижения новых исследовательских гипотез. А необходимость эмпирического подтверждения этих гипотез будет, в свою очередь, актуализировать поиск новых способов математической обработки и интерпретации полученного эмпирического материала.

Литература

1. Bogdanova O.Y., Bogdanova E.L., Komarovskaya L.V. Embracing the Values of Cognitive Development in Higher Education: Psychological Theory, Pedagogical Practice, Subjective Experiences // *Problems of Psychology in the 21st Century*. 2012. № 3(3). P. 6–17.
2. Богданова Е.Л., Богданова О.Е. Исследование когнитивных и эпистемологических ограничений развития компетентности студентов в инновационной практике высшего образования // *Вестн. Том. гос. ун-та*. 2011. № 345. С. 165–170.
3. Крамер Д. Математическая обработка данных в социальных науках: современные методы. М. : Академия, 2007.
4. Stahl E., Bromme R. The CAEB: An instrument for measuring connotative aspects of epistemological beliefs // *Learning and Instruction*. 2007. № 17. P. 773–785.

Статистическая оценка влияния стоимости энергоресурсов на курс национальной валюты (на примере казахстанского тенге)

К.А. Чернушенко, Т.В. Емельянова

Томский государственный университет
E-mail: k.chernushenko@gmail.com

Исследуются экономические факторы, влияющие на курс казахстанской валюты, и в дальнейшем прогнозируются границы его колебаний. Для этого определяется зависимость между данными и создается математическая модель, имеющая наилучшее прогнозирование.

Ключевые слова: критерий ранговой корреляции Спирмена; *t*-критерий Стьюдента; χ^2 -критерий Пирсона; критерий Жака-Бера; критерий Шапиро-Уилка; метод наименьших квадратов (МНК); ряд Фурье; аппроксимация.

В наше время, информация – это деньги. Поэтому задача прогнозирования всегда остается актуальной. Хороший прогноз может повлечь за собой большие изменения в той или иной сфере деятельности.

Казахстанско-российские взаимоотношения относятся к числу стабильных. В последнее время, эти взаимоотношения только развиваются. Также Казахстан является важным торговым партнером России. В связи с этим, в этой работе рассматривается курс казахстанской валюты.

Построим математическую модель, описывающую и позволяющую спрогнозировать курс казахстанской валюты. Для этого начнем с экономических факторов, которые теоретически связаны с данной валютой.

Как известно, основная продукция, экспортируемая из Казахстана это нефть [6] (как и у России). Поэтому естественно предположить, что ее стоимость на мировом рынке и курс российского рубля влияют на курс казахстанского тенге.

Итак, имеем данные, которые находятся в свободном доступе: курс тенге [7], курс рубля [8] (к доллару) и цена за баррель нефти (Urals) [9], взятые с шагом в 10 дней с 01.09.14 по 10.03.15 (по 20 элементов в каждой выборке). Также, курс тенге и курс рубля, взятые с шагом в один день с 02.12.14 по 05.04.15 (по 125 элементов).

Для проверки гипотезы о зависимости курса тенге и стоимости барреля нефти или курса рубля можно использовать различные статистические методы. Для числовых данных используют критерии Стьюдента и Спирмена. В первую очередь, был использован критерий ранговой корреляции Спирмена [5].

Метод ранговой корреляции Спирмена позволяет определить тесноту (силу) и направление корреляционной связи между двумя признаками или двумя профилями (иерархиями) признаков. Для подсчета ранговой корреляции Спирмена необходимо располагать двумя рядами значений, которые могут быть проранжированы.

Коэффициент корреляции Спирмена вычисляется по формуле

$$P = 1 - \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2,$$

где R_i – ранг наблюдения i -го элемента в первом ряду, S_i – ранг наблюдения i -го элемента во втором ряду. После чего коэффициент P сравнивается с табличным значением. Если $|P_{\text{выбр}}| > P_{\text{табл}}$, то гипотеза H_0 о независимость данных – отвергается, и принимается гипотеза H_1 о зависимость данных, и наоборот.

Рассчитаем коэффициенты для наших данных:

1) $P_1 = 0,716$ – между выборками ежедневных курсов тенге и рубля с 02.12.14 по 05.04.15 ($n = 125$).

2) $P_2 = 0,791$ – между выборками курсов тенге и рубля с шагом в 10 дней с 01.09.14 по 10.03.15 ($n = 20$).

3) $P_3 = -0,676$ – между курсом тенге и стоимостью барреля нефти с шагом в 10 дней с 01.09.14 по 10.03.15 ($n = 20$).

Критические значения для $n = 125$: 0,17 (при $\alpha = 0,05$).

Критические значения для $n = 20$: 0,45 (при $\alpha = 0,05$).

Результат: H_0 отвергается для всех P_i ($i = 1,2,3$). Корреляция между данными статистически значима.

Но так как этот метод имеет не самую высокую мощность, воспользуемся более мощным критерием – t -критерием Стьюдента [4].

Вычисляется эмпирическое значение критерия:

$$T_{\text{эмп}} = r_b * \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_b^2}}, \text{ где } r_b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 * \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента по выбранному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n-2$ находят критическую точку $t_{\text{кр}}(\alpha; k)$.

Но главным его условием является то, что данные должны быть из нормального распределения. Поэтому, в первую очередь надо проверить исходные данные на нормальность. Существует множество различных методов проверки. Воспользуемся двумя для подтверждения или опровержения данной гипотезы.

Критерий χ^2 Пирсона [1] – статистический критерий для проверки гипотезы H_0 , что наблюдаемая случайная величина подчиняется некоторому теоретическому закону распределения. В нашем случае:

$$H_0: F = N(a, \sigma^2); H_1: F \neq N(a, \sigma^2).$$

$$\text{Статистика критерия: } \chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} \in \chi_{N-1}^2.$$

После чего, рассчитанное χ^2 сравнивается с табличными значениями.

Проверив наши данные, получили следующие результаты: была принята гипотеза о том, что наши выборки с шагом в 10 дней подчиняются нормальному распределению. И отверг гипотезу для выборок с ежедневным фиксированием курсов.

Второй критерий является одним из самых мощных – критерий Шапиро-Уилка [2]. Будем проверять только те выборки, гипотеза нормальности для которых не отвергалась. Таких выборок 3, и их объем 20 элементов.

Критерий Шапиро-Уилка о нормальности распределения основан на оптимальной линейной несмещённой оценке дисперсии к её обычной оценке методом максимального правдоподобия. Статистика критерия имеет вид: $W_{\text{пр}} = \frac{1}{s^2} [\sum_{i=1}^n a_{n-i+1} (x_{n-i+1} - x_i)]^2$, где $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$, коэффициенты a_{n-i+1} берутся из таблицы [3]. После чего $W_{\text{пр}}$ сравнивается с табличными значениями [3].

Таким образом, рассчитав $W_{\text{пр}}$ для каждой выборки и сравнив полученные данные с табличными, получили, что все три выборки, по данному методу, подчиняются нормальному распределению.

Вернемся к проверке гипотезы о значимости парного коэффициента корреляции с помощью t-критерия Стьюдента. Итак, гипотеза о нормальности трех выборок не была отвергнута по результатам трех разных критериев. Рассчитав $T_{\text{выбр}}$ между двумя парами данных: курсом тенге и рубля, курсом тенге и ценой за баррель нефти, получим:

$$T1_{\text{эмп}} = 6,232 - \text{ между курсом тенге и рубля } (n = 20).$$

$$T2_{\text{эмп}} = 5,702 - \text{ между курсом тенге и ценой за баррель нефти.}$$

$$t_{\text{кр}}(0,05; 18) = 2,1009; t_{\text{кр}}(0,01; 18) = 2,8784.$$

Результат: H_0 отвергается в обоих случаях. Корреляция между данными статистически значима.

Одним из способов приближения данных некоторой непрерывной функцией является приближение полиномом по методу наименьших квадратов.

Произведем аппроксимацию полиномами разных степеней выборок, состоящих из цен за баррель нефти по горизонтали и курсом тенге по вертикали. График изображен на рис. 1.

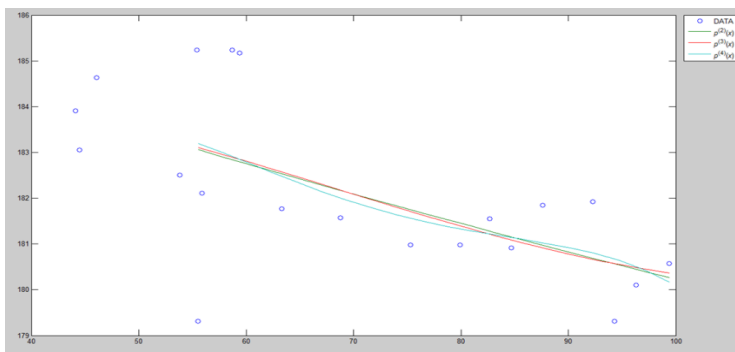


Рис. 1. Аппроксимация данных (нефть – тенге) полиномами 2,3,4 степенями

Для увеличения степени полинома слишком мало данных. А полиномы 2,3 и 4 степени выдают слишком большие квадратные корни из суммы квадратов ошибок. Они равны 71.214, 70.839 и 70.234 соответственно. Это слишком большие числа для такого объема выборок.

Аналогичная ситуация с графиком аппроксимации полиномами двух наборов данных, состоящих из курса рубля по горизонтали и курсом тенге по вертикали. График изображен на рис. 2.

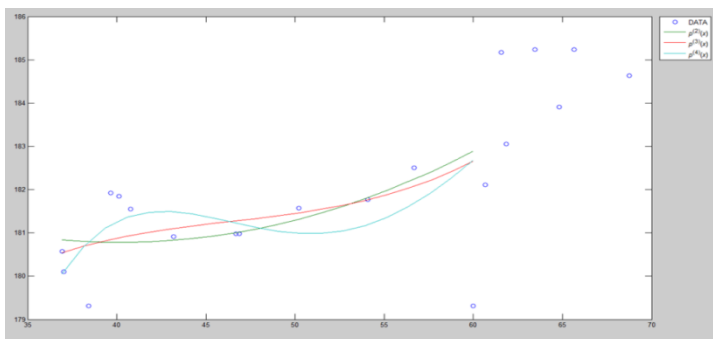


Рис. 2. Аппроксимация данных (рубль – тенге) полиномами 2,3,4 степенями

Таким образом, аппроксимация полиномами не дала хороших результатов.

Еще один из известных способов приближения данных некоторой непрерывной функцией является приближение тригонометрическими функциями, а именно, конечным отрезком ряда Фурье. Конечный ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k (a_i * \cos(i * x * w) + b_i * \sin(i * x * w))$$

Построим математическую модель f , имеющую:

- 1) наименьший квадратный корень из суммы квадратов ошибок;
- 2) график, без аномальных скачков между данными;
- 3) относительно хороший прогноз на ближайшее время.

Продолжим работу с выборками курсов тенге и рубля. Были рассчитаны коэффициенты для такой функции f , при $k = 7$, и доверительные интервалы для этих коэффициентов. Также был найден квадратный корень из суммы квадратов отклонений, который равен 4.3937. Далее был сделан прогноз и построен график, который можно увидеть на рис. 3.

Прогноз: 1) $f(52.4220) = 179.527$; 2) $f(51.6011) = 179.9547$.

По курсу за те же дни: 1) 185.8010; 2) 185.8700.

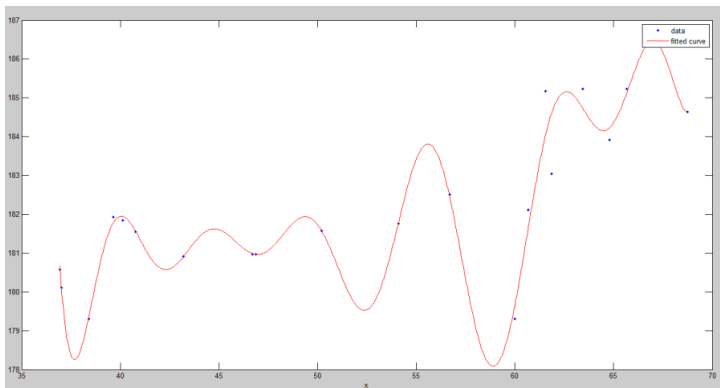


Рис. 3. Аппроксимация данных (рубль – тенге) отрезком ряда Фурье

Проведем аналогичную работу с выборкой курса тенге и выборкой цен за баррель нефти.

График полученной функции f , при $k = 8$, можно увидеть на рис. 4. Данная математическая модель имеет квадратный корень из суммы квадратов отклонений равный 17.8815.

Прогноз: 1) $f(52.55) = 183.6575$; 2) $f(57.64) = 183.9085$.

По курсу за те же дни: 1) 185.8010; 2) 185.8700.

Таким образом, получены следующие результаты исследования:

1. Выявлена связь между курсом тенге и ценой за баррель нефти, курсом тенге и курсом рубля.

2. Построены математические модели, при помощи аппроксимации полиномами и отрезком ряда Фурье.

3. Был произведен прогноз математических моделей и сравнен с настоящим курсом.

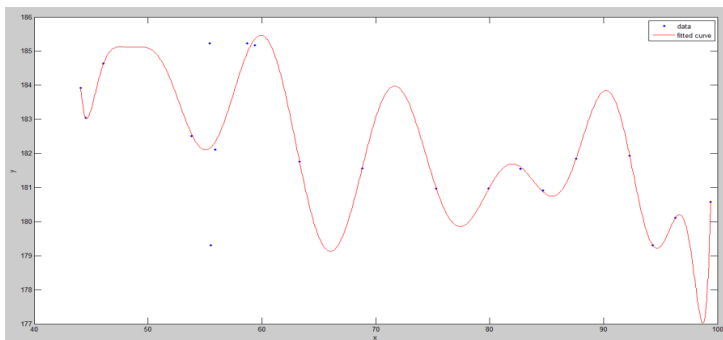


Рис. 4. Аппроксимация данных (нефть – тенге) отрезком ряда Фурье

В результате исследования: полученные математические модели позволяют прогнозировать стоимость казахстанской валюты в зависимости от изменения цены за баррель нефти и курса рубля.

Литература

1. D'Agostino R.B., Pearson E.S. A further development of test departure from normality // *Biometrika*. 1973. V. 60, № 3. P. 622.
2. Shapiro S.S., Wilk M.B. An analysis of variance test for normality // *Biometrika*. 1965. V. 52, № 3. P. 611.
3. Shapiro-Wilk Tables. URL: <http://www.real-statistics.com/statistics-tables/shapiro-wilk-table>
4. Student. The probable error of a mean // *Biometrika*. 1908. № 6 (1). P. 1–25.
5. Ранговая корреляция Спирмена. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9A%D0%BE%D1%8D%D1%84%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82_%D0%BA%D0%BE%D1%80%D1%80%D0%B5%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D0%B8_%D0%A1%D0%BF%D0%B8%D1%80%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B0
6. История казахстанской нефтяной отрасли. URL: <http://www.neftegaz.kz/analitik-articles/istoriya-kazaxstanskoj-neftyanoj-otrasli.html>
7. Курс доллара США к казахскому тенге. URL: <http://bankir.ru/kurs/dollar-ssha-k-kazahskij-tenge>
8. Курс доллара и евро. URL: http://www.consultant.ru/law/ref/stavki/kurs-dollar-euro-2015/?utm_campaign=popular&utm_source=google.adwords&utm_medium=cpc&utm_content=kurs2015&gclid=CjwKEAjw0q2pBRC3jrb24JjE8VgSJAAYIzAd59_QgLPJLkN51J_mN-brXc0zErvQsLWuy4b6--59XxoCs7_w_wcB
9. Нефтетранспортная территория. URL: <http://www.nefttrans.ru/info/quotes/index.php>

Исследование обнаружения момента разладки процесса авторегрессии первого порядка

Ю.В. Дьяченко, Т.В. Емельянова

Томский государственный университет

E-mail: YuliaDyatchenko1994@mail.ru

Рассматривается проблема тестирования и обнаружения момента разладки процесса авторегрессии первого порядка. Изучены два метода исследования разладки: метод отношения правдоподобия и последовательная процедура. Проведено численное моделирование, чтобы оценить эффективность статистики для тестирования параметров.

Ключевые слова: временные ряды; метод отношения правдоподобия; последовательная процедура; момент разладки.

Введение

В прикладных задачах анализа временных рядов широко используются авторегрессионные модели, которые дают адекватное описание стационарных процессов. При подгонке модели к реальным данным с целью прогноза будущих значений необходимо оценивание параметров, определяющих авторегрессионный процесс.

Для обнаружения разладки в работе рассматриваются две процедуры. Предполагается, что шумы, определяющие динамику процесса, являются последовательностью независимых случайных величин. Первая процедура основана на критерии отношения правдоподобия. Вторая процедура использует последовательное приближение.

При моделировании были найдены разладки, которые получаются в результате заданных коэффициентов и объемах выборки.

Обнаружение момента разладки с помощью критерия отношения правдоподобия.

Дадим определение стационарного временного ряда.

Определение. Стационарным временным рядом x_t является процесс конечной дисперсии такой, что:

- 1) функция среднего значения является постоянной и не зависит от времени t ;
- 2) функция автоковариации зависит от s и t только через их разность $|s - t|$.

В большинстве практических приложений рассматривают стационарные временные ряды с нормальным законом распределения значений ряда.

Рассмотрим задачу обнаружения разладки для процесса авторегрессии первого порядка.

Процесс авторегрессии первого порядка имеет следующий вид:

$$X_t = \delta + \varphi X_{t-1} + \omega_t, \quad t = 1, 2, 3 \dots$$

где ω_t – независимые, одинаково распределенные случайные величины, с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Для простоты рассмотрим случай, когда параметр временного ряда один, т.е. $\delta = 0$. Тогда процесс авторегрессии первого порядка примет вид

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \omega_t.$$

Рассмотрим задачу проверки гипотезы H_0 , против альтернативы H_1

$$H_0: X_t = \varphi X_{t-1} + \omega_t \quad t = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{момента разладки нет})$$

$$H_1: \exists k, \text{ т. ч. } X_t = \begin{cases} \varphi_0 X_{t-1} + \omega_t, & t \leq k, \\ \varphi_1 X_{t-1} + \omega_t, & k < t \leq n. \end{cases} \quad (\text{разладка есть})$$

где $\varphi_0 \neq \varphi_1$, k – время, когда происходит изменение.

Если $X_{t-1} = x_{t-1}$, то процесс X_t имеет нормальное распределение

$$f(X_t | x_{t-1}) \sim N(\varphi_0 x_{t-1}, \sigma^2).$$

Учитывая, что $X_1 = x_1$, при нулевой гипотезе, совместная функция плотности вероятности для $\{X_2, X_3, \dots, X_n\}$ запишется в виде

$$L_0 = f(x_2, x_3, \dots, x_n | x_1) = \frac{f(x_1, x_2) f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_1) f(x_1, x_2)} \dots \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = \\ f(x_2 | x_1) f(x_3 | x_2, x_1) \dots f(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = \\ (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n (x_i - \varphi_0 x_{i-1})^2\right\}.$$

Если функция правдоподобия дифференцируема, то необходимое условие экстремума, для этого приравняем к нулю ее частные производные.

Пусть $\frac{\partial \log L_0}{\partial \varphi_0} = 0$ и $\frac{\partial \log L_0}{\partial \sigma_n} = 0$, получим с помощью метода максимального правдоподобия оценку вероятности φ_0 и σ^2

$$\hat{\varphi}_0 = \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} / \sum_{i=2}^n x^2_{i-1} \\ \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n (x_i - \varphi_0 x_{i-1})^2.$$

Запишем совместную функцию плотности для H_1 , а так же полученные по методу максимального правдоподобия оценки вероятностей для $\hat{\sigma}_k^2$, $\hat{\varphi}_{0k}$ и $\hat{\varphi}_{1k}$

$$L_1 = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\sum_{i=2}^n (x_i - \varphi_{0k} x_{i-1})^2 + \sum_{i=k+1}^n (x_i - \varphi_{1k} x_{i-1})^2]\right\}.$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-1} [\sum_{i=2}^n (x_i - \hat{\varphi}_{0k} x_{i-1})^2 + \sum_{i=k+1}^n (x_i - \hat{\varphi}_{1k} x_{i-1})^2], \\ \hat{\varphi}_{0k} = \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} / \sum_{i=2}^n x^2_{i-1}, \\ \hat{\varphi}_{1k} = \sum_{i=k+1}^n x_i x_{i-1} / \sum_{i=k+1}^n x^2_{i-1}.$$

Таким образом, функция отношения максимального правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{L_0(\hat{\sigma}_n^2, \hat{\varphi}_0)}{L_1(\hat{\sigma}_k^2, \hat{\varphi}_{0k}, \hat{\varphi}_{1k})} = \\ &= \frac{(2\pi\hat{\sigma}_n^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_n^2} \sum_{i=2}^n (x_i - \hat{\varphi}_0 x_{i-1})^2\right\}}{(2\pi\hat{\sigma}_k^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_k^2} [\sum_{i=2}^n (x_i - \hat{\varphi}_{0k} x_{i-1})^2 + \sum_{i=k+1}^n (x_i - \hat{\varphi}_{1k} x_{i-1})^2]\right\}} \\ &= \frac{(2\pi\hat{\sigma}_n^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_n^2} \hat{\sigma}_n^2 (n-1)\right\}}{(2\pi\hat{\sigma}_k^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_k^2} \hat{\sigma}_k^2 (n-1)\right\}} = \left(\frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\sigma}_n^2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

Прологарифмируем отношение правдоподобия

$$\Lambda_k = -2\log\lambda_k = (n-1)(\log\hat{\sigma}_n^2 - \log\hat{\sigma}_k^2).$$

В результате испытательная статистическая величина имеет вид

$$\Lambda_n = \max_{2 < k < n-1} |\Lambda_k| = \max_{2 < k < n-1} |(n-1)(\log\hat{\sigma}_n^2 - \log\hat{\sigma}_k^2)|.$$

Оценка точки перехода: $\hat{k} = \arg\{k; \Lambda_n = \max_{2 < k < n-1} |\Lambda_k|\}$.

Дэвис, Хуан и Яо представили следующую теорему, которая позволяет установить критическую область для нахождения момента разладки модели AR(1).

Теорема: Пусть при гипотезе H_0 (разладки нет)

$$P\left[\frac{\sigma^2\Lambda_n - b_n(1)}{a_n(1)} \leq x\right] \rightarrow \exp(-2e^{-x/2}),$$

при этом $\Lambda_n = \max_{p < k < n} \Lambda_n(k)$ – статистика отношения правдоподобия,

$$b_n(1) = (2 \ln \ln n + (1/2) \ln \ln \ln n - \ln \Gamma(1/2))^2 / (2 \ln \ln n) \text{ и}$$

$$a_n(1) = \sqrt{b_n(1) / (2 \ln \ln n)} = (2 \ln \ln n + (1/2) \ln \ln \ln n - \ln \Gamma(1/2)) / (2 \ln \ln n) - \text{константы нормализации, } \Gamma(\cdot) - \text{гамма функция, } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Теорема позволяет определить распределение случайной величины для нахождения критической области функции отношения правдоподобия модели AR(1).

Численное моделирование

Задача моей работы состоит в том, чтобы на моделированных данных проверить, с помощью указанного критерия, гипотезу H_0 , о том, что момента разладки нет, против альтернативы H_1 , о его существовании:

Численное моделирование проводится в среде программирования R.

Далее представлены результаты моделирования. Если разница между коэффициентами авторегрессии мала, то траектория процесса примет вид:

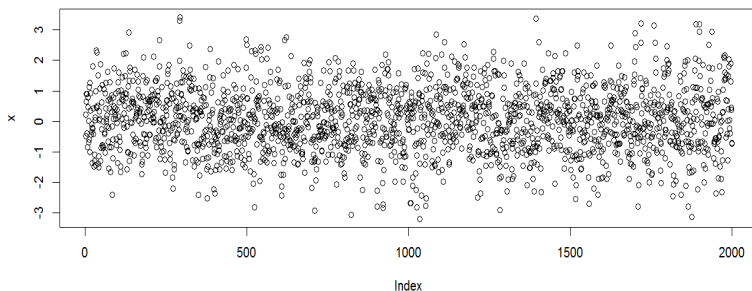


Рис. 1. Процесс AR(1) с параметром до разладки $\phi_0 = 0.3$,
параметр после разладки $\phi_1 = 0.4$, $k=1688$

Где ϕ_0 и ϕ_1 параметры авторегрессии, t – номер переходного шага. Для всех траекторий процесса объем выборки примем равным 1500 и 500.

В данном случае можем сделать вывод, что при небольшой разности коэффициентов изменение процесса едва заметно. А задача заключается в том, чтобы найти разладку близкую к идеальной. Для этого увеличим разность коэффициентов:

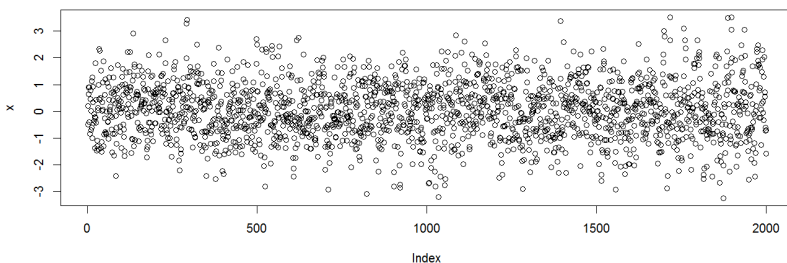


Рис. 2. Процесс AR(1) с параметром до разладки $\phi_0 = 0.3$,
параметр после разладки $\phi_1 = 0.5$, $k=1504$

В этом случае номер переходного шага отличается от истинного на 4. На графике переход все еще слабо заметен.

Наконец, рассмотрим траекторию процесса с большей разностью коэффициентов авторегрессии (рис. 3).

Получили ожидаемый момент разладки. На графике четко видно изменение процесса.

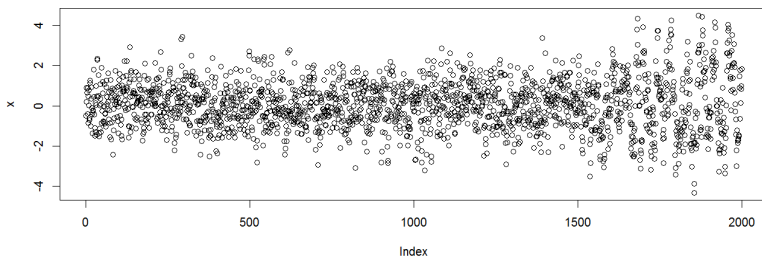


Рис. 3. Процесс AR(1) с параметром до разладки $\phi_0 = 0.3$, параметр после разладки $\phi_1 = 0.8$, $k=1501$

Последовательное обнаружение момента разладки.

Пусть наблюдаемый процесс X_t является процессом авторегрессии первого порядка и описывается уравнением

$$X_{t+1} = \begin{cases} \phi_1 X_t + \varepsilon_{t+1} & X_t < \Theta, \\ \phi_2 X_t + \varepsilon_{t+1} & X_t \geq \Theta. \end{cases}$$

В этом случае процедура обнаружения разладки определяется формулами

$$\begin{aligned} \tau_0(H) &= 0, \quad H > 0. \\ \tau_i(H) &= \inf \left\{ k \geq \sigma_i(H) : \sum_{t=\sigma_i(H)}^k r(t, x) \geq H \right\}, \quad i \geq 1 \\ \sigma_i(H) &= \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \tau_{i-1}(H) + 1, & i \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Выбором моментов $\tau_i(H)$ можно регулировать как вероятность ложных тревог, так и величину запаздывания в обнаружении разладки. Моменты $\tau_i(H)$ должны выбираться с учетом различия конкурирующих моделей в отдельные моменты времени. В качестве меры близости моделей в момент t будем использовать величину

$$r(t, x) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 X^2(t)}{a^2}.$$

Учитывая, что статистика

$$Y_i(H) = \frac{2(\phi_1 - \phi_0)}{a^2 * H} \sum_{t=\sigma_i}^{\tau_i} \alpha_i(t) X_t (X_{t+1} - \frac{\phi_1 + \phi_0}{2} X_t)$$

претерпевает скачок после разладки, процедуру обнаружения разладки естественно определить следующим образом. Зададим порог δ ($|\delta| < 1$) и при выполнении в i -ом цикле неравенства $Y_i(H) > \delta$ будем принимать решение о разладке.

Оптимальные значения параметров H^* и δ^* , отвечающие вероятностям ложной тревоги α и ложного спокойствия β , даются равенствами

$$\delta^* = \frac{\sqrt{\beta} - |\rho| \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta} + |\rho| \sqrt{\alpha}} \quad H^* = \min(H_1, H_2)$$

$$H_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{|\rho|}{\sqrt{\beta}} \right)^2 \quad H_2 = \left(\frac{1}{|\rho| \sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^2$$

$$\alpha \geq \frac{4}{H(\delta+1)^2} \quad - \text{ ложная тревога}$$

$$\beta \geq \frac{4}{H(\delta-1)^2} \quad - \text{ ложное спокойствие.}$$

Можем оценить среднюю продолжительность до и после разладки. После ряда вычислений получаем следующие неравенства для среднего времени между ложными тревогами T_0 и среднего времени запаздывания T_1

$$T_0 \geq \frac{H^* a^2 (1 - \varphi_0^2)}{\alpha a_1^2 (\varphi_1 - \varphi_0)^2} \quad T_1 \leq \frac{H^* (1 - \varphi_1^2)}{a_2^2 (1 - \beta) (\varphi_1 - \varphi_0)^2}$$

Далее представлены результаты имитационного моделирования осуществленного на языке C++ в среде Visual Studio.

$n = 1500$ – объем выборки; $H = 0.6$; $\delta = 0.9$

1) $\varphi_0 = 0.3$	2) $\varphi_0 = 0.3$
$\varphi_1 = 0.5$	$\varphi_1 = 0.8$
$Y_i(H) = 1.07, i=1$	$Y_i(H) = 1.22, i=2$
$\tau_i(H) = 1369$	$\tau_i(H) = 471$
$T_0 \geq 7.391$	$T_0 \geq 1.183$
$T_1 \leq -0.017$	$T_1 \leq -0.0012$

Вывод

Процедура обнаружения разладки с помощью критерия отношения правдоподобия не характеризует ни ложные тревоги, ни время запаздывания, она определяет только момент разладки. Второй же метод, последовательное обнаружение, хорошо диагностирует разладку, но при большой разнице коэффициентов слишком часто дает ложные тревоги. В результате, если мы на практике ожидаем большую разницу между коэффициентами, то выгоднее первый метод, он достаточно точно все диагностирует и не дает возможности при этом зря беспокоиться. Если же разница между коэффициентами мала, то выгоднее второй метод.

Литература

1. Бокс Дж., Дженкинс Г.М. Анализ временных рядов, прогноз и управление. М. : Мир, 1974. 406 с.
2. Андерсон Т.В. Статистический анализ временных рядов. М. : Мир, 1976. 756 с.
3. Fang Yuan. Tests for Change-Point of the AR(1) Model. May, 2013. 40 с.
4. Конев В.В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1985. 267 с.

Оценивание параметров непрерывной авторегрессии с использованием последовательной процедуры

Ю.В. Иванюк, Т.В. Емельянова

Томский государственный университет
E-mail: yuliya.ivanyuk.90@mail.ru

Рассматривается последовательная процедура, которая позволяет оценить неизвестные параметры устойчивого процесса авторегрессии с непрерывным временем. Одним из ее преимуществ является способность контролировать среднеквадратическую точность (СКТ) оценок. Для проверки согласия выборочных свойств полученных оценок с теоретическими результатами проводилось моделирование по методу Монте-Карло.

Ключевые слова: авторегрессионный процесс, среднеквадратическая точность, последовательное оценивание, момент остановки, метод наименьших квадратов (МНК).

Актуальность задач прогнозирования в современных условиях достаточно высока. Качество их решения может в значительной степени повлиять на принятие того или иного решения в различных сферах деятельности. Регрессионные модели используются в решении прикладных физических и экономических задач при моделировании спроса, доходности акций, прецессии земной оси [1] и т.д.

Рассмотрим задачу оценивания параметров модели, описываемой системой линейных дифференциальных стохастических уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t \quad (1)$$

с начальным условием $X_0 = (X_1(0), \dots, X_p(0))$. Здесь A и B – матрицы постоянных коэффициентов размера $p \times p$, W_t – стандартный p -мерный винеровский процесс. К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии p -го порядка (АР(p))

$$dx_t^p = (\theta_1 x_t^{p-1} + \dots + \theta_p x_t) dt + \sigma dW_t \quad (2)$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид $f(\lambda) = \sigma^2 / |Q(i\lambda)|^2$.

Известно, что таким процессом можно аппроксимировать любой стационарный гауссовский процесс. Процесс (2) можно представить в виде (1), если положить

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ \dots \\ x_t^{p-1} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & I_p \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_p & \dots & \theta_1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma \end{pmatrix}; I_p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Одним из основных методов оценивания вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ является метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому оценка $\hat{\theta}_T$ имеет вид [7]

$$\hat{\theta}_T = M_T^{-1} \int_0^T X_s d\langle X_t \rangle_p, M_T = \int_0^T X_s X_s' ds, \quad (3)$$

где $\langle a \rangle_i$ обозначает i -ю координату вектора столбца $a = (a_1, \dots, a_p)'$; M_T – выборочная информационная матрица Фишера, M_T^{-1} – обратная к ней, если она не вырождена, и $M_T^{-1} = 0$ – в противном случае. Асимптотические свойства вектора оценок $\hat{\theta}_T$ по методам максимального правдоподобия и наименьших квадратов изучались в ряде работ [1–2]; однако, эти свойства могут нарушаться при малых и умеренных объемах данных. Поэтому представляет интерес задача неасимптотического анализа свойств оценок [3–7].

В данной работе предложена одноэтапная процедура оценивания, использующая усеченное правило остановки наблюдений и позволяющая контролировать СКТ оценок. Эта процедура, как и предложенная в [6, 7], является последовательной модификацией оценок МНК и может использоваться при наличии некоторой априорной информации о параметрах. Однако, в отличие от процедуры, предложенной в [6, 7], она применима и в случае объема выборки, недостаточного для достижения даже минимального порогового значения H .

При построении последовательного плана будет использоваться следующая лемма, доказанная в [7], дающая оценку нормы уклонения оценки (3) от ее истинного значения.

Лемма 1. Пусть матрица M^T в (3) невырождена. Тогда квадрат нормы уклонения оценки (3) удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{\theta}_T - \theta\|^2 \leq \|M_T^{-2}\| \cdot \|m_T\|^2, m_T = \int_0^T X_s dW_s \quad (4)$$

Как было показано в [7] (см. лемму 3), с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M_T / T = F, \quad (5)$$

где F – положительно определенная матрица. Отсюда следует, что множитель $\|M_T^{-2}\|$ в правой части (4) монотонно убывает с ростом T , причем $\lim_{T \rightarrow \infty} \|M_T^{-2}\| = 0$. Это позволило использовать в работе [7] следующий план оценивания $\delta = \delta(\tau, \tilde{\theta})$, где

$$\tau = \tau(H) = \inf \left\{ t > 0 : \|M_t^{-2}\|^{1/2} \leq \frac{1}{H} \right\}, \quad t \in [0, T], H > 0 \quad (6)$$

$$\tilde{\theta}(H) = M_{\tau(H)}^{-1} \cdot \int_0^{\tau(H)} X_s d\langle X_t \rangle_p. \quad (7)$$

Момент остановки наблюдений в последовательном плане (6)–(7) является случайной величиной, зависящей от выбора порога H , которая может принимать достаточно большие значения. В прикладных задачах длительность реализации процесса, используемая для идентификации неизвестных параметров, часто ограничена некоторой величиной T . В этом случае вместо последовательной оценки (6)–(7) будем использовать усеченный последовательный план, определенный следующими формулами:

$$N(H) = \min(\tau(H), T), \quad (8)$$

$$\theta^*(H) = M_{N(H)}^{-1} \cdot \int_0^{N(H)} X_s d\langle X_t \rangle_p \chi_{(N(T) \leq T)}. \quad (9)$$

Предложенная процедура (8)–(9), обладает следующими свойствами, описанными в теоремах, приведенных ниже.

Асимптотическое поведение средней длительности процедуры дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $N(H)$ определяется формулой (8), начальное условие в уравнении (1) таково, что $\sup_{\theta \in \Lambda_\gamma} E_\theta \|X_0\|^8 < +\infty$. Тогда для любого

$$\text{компакта } K \subset \Lambda_\gamma \quad \limsup_{H \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} \left| E_\theta \frac{N(H)}{H} - \|F^{-2}\|_2^{-1/2} \right| = 0.$$

Найдем верхнюю границу для СКТ оценки вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ в уравнении (2) с помощью последовательного плана (8)–(9).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любого компактного множества $K \subset \Lambda_\gamma$

$$\sup_{\theta \in K} E_0 \left(\|\theta^*(H) - \theta\|^2 \right) \leq \frac{a_K}{H} (1 + o(1)), \quad (10)$$

где $a_K = \sup_{\theta \in K} \varphi(\theta)$, $\varphi(\theta) = trF \|F^{-2}\|^{1/2}$, $o(1) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow \infty$.

Для проверки согласия выборочных свойств оценок (8) – (9) с теоретическими результатами теорем 1, 2 проводилось моделирование по методу Монте-Карло, включавшее 50 повторений процедуры при различных значениях порога H , определяющего момент останковки $\tau = \tau(H)$.

Численное моделирование проводим для случая $p=2$, т.е. для стохастического процесса

$$d\dot{x}_t = (\theta_1 \dot{x}_t + \theta_2 x_t) dt + dW_t. \quad (11)$$

В матричной форме процесс имеет вид $dX_t = AX_t + BW_t$, где

$$X_t = \begin{pmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \theta_2 & \theta_1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix};$$

W_t – стандартный двумерный винеровский процесс, причем $\langle W_t \rangle_2 = w_t$.

Множество устойчивости Λ_γ процесса (11) задается равенством

$$\Lambda_\gamma = \left\{ (\theta_1, \theta_2) : \theta_2 < \frac{\gamma}{2} \theta_1 + \gamma^2, \theta_1 < 0 \right\}, \gamma > 0. \quad F = \text{diag} \left(\frac{\sigma^2}{2\theta_1\theta_2}, \frac{\sigma^2}{-2\theta_1} \right),$$

$\|F^{-2}\|^{1/2} = \frac{2|\theta_1| \sqrt[4]{1+\theta_2^4}}{\sigma^2}$, поэтому при больших H средняя длительность

процедуры оценивания удовлетворяет соотношению

$$E_0 \tau(H) \sim H \frac{2|\theta_1| \sqrt[4]{1+\theta_2^4}}{\sigma^2} \quad \text{для всех } \theta = (\theta_1, \theta_2)' \in K, \quad \gamma > 0. \quad \text{При этом СКТ}$$

оценивания равномерно по компакту K определяется неравенством (10),

причем $\varphi(\theta) = trF \|F^{-2}\|^{1/2} = (1 - \theta_2) \sqrt[4]{1 + \theta_2^4} / |\theta_2|$. Априорную область для

параметров модели θ_1 и θ_2 зададим следующим компактом

$$K \left\{ (\theta_1, \theta_2) : -0,6 \leq \theta_1 \leq -0,2; -0,6 \leq \theta_2 \leq -0,2 \right\}. \quad \text{Максимизация функции}$$

$\varphi(\theta)$ по этой области дает следующую постоянную

$$a_K = \max_{\theta \in K} \varphi(\theta) = 6,002399, \quad \text{используемую в теореме 2.}$$

В табл. 1 приводятся результаты численного моделирования значений

оцениваемых параметров θ_1 и θ_2 . Здесь H – величина порога, $N^*(H)$ –

выборочная средняя длительность процедуры, $N^*(H)/H$ – удельная средняя длительность и $\|F^{-2}\|^{1/2}$ ее асимптотическое теоретическое значение.

При сравнении последних двух строк табл. 1 видно, что с увеличением величины порога H выборочная характеристика $N^*(H)/H$ стремится к теоретическому значению, что свидетельствует о согласии результатов моделирования с утверждением теоремы 1. Выборочные характеристики, касающиеся точности последовательных оценок, полученных по 50 реализациям процедуры с порогом $H = 300$, представлены в табл. 2.

Таблица 1

Результаты численного моделирования

θ_1	-0,3	-0,3	-0,3	-0,3	-0,3
θ_2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2
H	50	100	300	500	1000
$N^*(H)$	100,1	131,2	232	315,6	605,6
$\frac{N^*(H)}{H}$	2,002	1,312	0,773	0,631	0,606
$\ F^{-2}\ ^{1/2}$	0,60024	0,60024	0,60024	0,60024	0,60024

Таблица 2

Результаты численного моделирования

θ_1	-0,3	-0,4	-0,5	-0,2	-0,2	-0,2
θ_2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5
$SD(\theta_1^*)$	0,0010	0,0045	$3 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0047	0,0002
$SD(\theta_2^*)$	$2 \cdot 10^{-5}$	0,0008	$7 \cdot 10^{-6}$	0,0001	0,0011	0,0001
$SD(\theta_1^{**})$	0,0006	0,0001	0,0070	0,0009	0,0020	0,0048
$SD(\theta_2^{**})$	0,0010	0,0005	$2 \cdot 10^{-5}$	0,0032	0,0003	0,0019
$\varphi(\theta)/H$	0,0200	0,0200	0,0200	0,0200	0,0200	0,0200

Здесь наряду со значениями параметров модели θ_1 и θ_2 , в следующих за ними строках, приводятся СКТ полученных последовательных оценок. В строках $SD(\theta_1^{**})$ и $SD(\theta_2^{**})$ даются среднеквадратические отклонения обычных оценок МНК (3), вычисленных по реализации длины T . При этом значение T находилось из условия $T = N^*(50) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} N_i(50)$, где $N_i(50)$ определяет длительность последовательной процедуры в i -м эксперименте, $\varphi(\theta)/H$ – верхняя граница доверительной области для среднеквадратической точности последовательной оценки. Результаты численного моделирования показывают хорошую согласованность с теоретическими результатами. Сравнение последовательных и обычных МНК оценок показывает, что они близки по точности. При этом, однако, следует учитывать, что последовательные оценки позволяют контролировать СКТ путем выбора порога H . Заметим, что при моделировании оценок МНК с фиксированной длительностью наблюдений T , эта длительность выбиралась с помощью последовательной процедуры.

Литература

1. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход / пер. с англ. М.: Наука, 1989. 304 с.
2. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
4. Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров процессов диффузионного типа // Математические заметки. 1972. Т. 12, вып. 5. С. 627–638.
5. Konev V.V., Pergamenschikov S.M. Sequential estimation of the parameters in a trigonometric regression model with the Gaussian coloured noise // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2003. № 6. P. 215–235.
6. Kabanov Yu., Pergamenschikov S. Two scale stochastic systems: asymptotic analysis and control. Berlin ; New York : Springer, 2003. 266 p.
7. Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии // Вестник Томского государственного университета. 2013. № 5(25). С. 12–25.

Оценивание параметра модели авторегрессии первого порядка с дискретным временем

А.О. Иващенко, Т.В. Емельянова

Томский государственный университет

E-mail: anuta_i@bk.ru

Рассматривается байесовский и последовательный подход к оцениванию параметра β модели авторегрессии первого порядка (AR(1)). В исследовании проведено численное моделирование, в ходе которого подтверждается, что разность рисков при использовании последовательного подхода к оцениванию параметра β может принимать отрицательные значения для различного распределения ошибок, в том числе и для нормального распределения.

Ключевые слова: временные ряды; байесовский подход к оцениванию; последовательный подход к оцениванию; разность рисков; правило остановки.

В задачах обработки временных рядов широко используются авторегрессионные модели, описывающие стационарные случайные процессы. Параметры таких моделей в большинстве случаев неизвестны, поэтому перед использованием модели требуется идентифицировать ее параметры непосредственным оцениванием.

В работе рассматривается задача оценивания параметра, а также исследование качества оценки параметра модели авторегрессии первого порядка с дискретным временем.

Целью нашего исследования является сравнение последовательного и байесовского подходов к оцениванию параметра модели устойчивой авторегрессии первого порядка с различным распределением ошибок.

Рассматривается процесс авторегрессии первого порядка с дискретным временем

$$X_i = \beta X_{i-1} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots,$$

где $X_0 = 0$, ε_i – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Чаще всего для оценивания параметра модели AR(1) применяют метод наименьших квадратов (МНК) [6]. Можно рассмотреть процедуру оценивания по методу наименьших квадратов, в которой число наблюдений не фиксируется заранее. Процесс наблюдений останавливается в некоторый момент времени [2]. Построим последовательную оценку, представляющую собой оценку по методу наименьших квадратов, вычисленную в момент остановки

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i X_{i-1}}{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2}.$$

Оценка МНК нелинейная, что затрудняет исследования. Хорошо исследованы асимптотические свойства оценки: полученная оценка является асимптотически несмещенной и асимптотически нормальной [4].

При использовании байесовского подхода к оцениванию параметров вводится некоторая функция потерь, которая характеризуется как мера расхождения между истинным значением оцениваемого параметра и его оценкой. В свою очередь риск определяется как математическое ожидание функции потерь [5]. Рассмотрим функцию потерь вида

$$L_n(\hat{\beta}_n, \beta) = A * \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\bar{X}_i - E(X_i|X_{i-1})]^2 + n = An^{-1}I_n(\hat{\beta}_n - \beta)^2 + n, \quad (1)$$

где $I_n = \sum_{i=1}^n X_{i-1}^2$, а $A = 1/c$ – обратная величина цены одного наблюдения [1]. Риск функции потерь (1)

$$\tilde{R}_n = \frac{A\sigma^2}{n} + n + o(n^{-1}), n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Пренебрегая бесконечно малой, риск \tilde{R}_n минимизируется объемом выборки $n_0 \approx A^{\frac{1}{2}}\sigma$. Таким образом, $\tilde{R}_n \approx 2n_0$ [3].

Однако бесполезно использовать n_0 в случае, когда неизвестны значения σ^2 и β . Для такой ситуации предлагается последовательный подход к оцениванию [7]. При этом пользуются правилом остановки, построенным по наблюдаемому процессу

$$t_A = \inf\left\{n \geq m_A: n \geq A^{\frac{1}{2}}\hat{\sigma}_n\right\}, \quad (3)$$

где $\hat{\sigma}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\beta}_n X_{i-1})^2$ и m_A – заранее заданный объем выборки.

Таким образом, риск, с учетом заданного правила остановки,

$$R_{t_A} = EL_{t_A}(\hat{\beta}_{t_A}, \beta).$$

В статье «Последовательное оценивание временных рядов» [1] профессор Т. Шрирам утверждает, что оценка \bar{X}_{t_A} является асимптотически эффективной, следовательно, $R_{t_A}/R_n \rightarrow 1$ при $t_A \rightarrow 0$. Более того, правило остановки также является асимптотически эффективным, то есть $E(t_A)/n_0 \rightarrow 1$.

Опираясь на исследования, проведенные профессором Т. Шрирамом, запишем теоретическую разность рисков [1]

$$\begin{aligned} R_{t_A} - \tilde{R}_{n_0} &= AEt_A^{-1}I_{t_A}(\hat{\beta}_{t_A} - \beta)^2 + Et_A - 2A^{\frac{1}{2}}\sigma = \\ &= AE\left[t_A^{-1}I_{t_A}(\hat{\beta}_{t_A} - \beta)^2 - \frac{\sigma^2}{t_A}\right] + E\frac{\left(t_A - A^{\frac{1}{2}}\sigma\right)^2}{t_A}. \end{aligned} \quad (4)$$

Разность между $E\left(t_A^{-1}I_{t_A}(\hat{\beta}_{t_A} - \beta)^2\right)$ и $E(\sigma^2/t_A)$ в первом слагаемом формулы (4) является значением влияния правила останковки на ошибку оценки параметра.

В своей работе профессор Т. Шрирам сделал предположение о том, что разность рисков $R_{t_A} - \tilde{R}_{n_0} = O(1)$ при $A \rightarrow \infty$, но это предположение пока не имеет теоретического обоснования [1]. Для подтверждения, проведено численное моделирование, при помощи которого показано, что разность рисков при использовании последовательной процедуры оценивания может принимать отрицательные значения даже для нормального распределения ошибок.

Моделирование проводилось для 2 разных распределений:

- 1) стандартное нормальное распределение;
- 2) смешанное нормальное распределение с процентом загрязненности $\alpha = 1\%$.

Для определенности значения параметра β приняли равными 0.1–0.9 с шагом 0.1. Для каждого из распределений $X_0 = 0$, $A = 400, 1000, 4000, 10\ 000$, $m_A = 5$.

Рассмотрим разность рисков при последовательном и байесовском подходе к оцениванию параметра в случае стандартного нормального распределения.

В таблице указаны результаты вычислений при различных значениях $A = 1/c$. Здесь n_0 – количество наблюдений в момент останковки t_A ; \tilde{R}_{n_0} – оценка риска при количестве наблюдений n_0 ; $\hat{\beta}_{t_A}$ – оценка параметра модели линейной авторегрессии в момент останковки t_A ; $\hat{\sigma}_{t_A}^2$ – оценка дисперсии в момент останковки t_A . Под разностью рисков понимается разность между риском R_{t_A} , вычисленным в момент останковки t_A , и оценкой риска \tilde{R}_{n_0} при количестве наблюдений n_0 .

По данным, приведенным в табл. 1, построим график, описывающий разность рисков.

Заметим, что при малых значениях параметра β и цены наблюдений A равной 10 000 разность рисков отрицательна. При β , лежащих в интервале от 0.3 до 0.5, разности рисков примерно одинаковы, а при $\beta \geq 0.6$ разности положительны. Следовательно, последовательный подход к оцениванию оказывается эффективным при малых значениях параметра, в то время как байесовский подход к оцениванию эффективен при больших значениях параметра.

Рассмотрим разность рисков в случае смешанного нормального распределения с 1% загрязненности.

По данным, приведенным в табл. 2, построим график, описывающий разность рисков.

В рассмотренном случае разности рисков стремятся к 0 с увеличением значения параметра β .

Таким образом, последовательный метод оценивания параметров позволяет получить оценки с гарантированным качеством в среднеквадратическом смысле за конечное время. Время оценивания определяется правилом остановки, построенным по наблюдаемому процессу.

Численным моделированием продемонстрировано, что использование последовательного оценивания параметра β эффективно минимизирует риск функции потерь, что является подтверждением эффективности последовательного оценивания для параметров модели авторегрессии первого порядка.

Таблица 1

Стандартное нормальное распределение: $\varepsilon^2 \sim N(0, 1)$

β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
A=400, $n_0 \cong 20$									
\hat{R}_{n_0}	40	40	40	40	40	40	40	40	40
Разность рисков	9.06	11.02	13.58	16.29	19.57	24.12	28.99	35.62	41.94
$\hat{\beta}_{\tau_A}$	0.11	0.22	0.31	0.42	0.53	0.62	0.72	0.81	0.89
$\hat{\sigma}_{\tau_A}^2$	2.63	2.62	2.7	2.68	2.67	2.72	2.69	2.75	2.7
A=1000, $n_0 \cong 31.63$									
\hat{R}_{n_0}	63.24	63.24	63.24	63.24	63.24	63.24	63.24	63.24	63.24
Разность рисков	5.95	9,31	14.17	19.83	27.96	37.19	50.14	65.44	78.26
$\hat{\beta}_{\tau_A}$	0.12	0,23	0.33	0.44	0.52	0.59	0.74	0.82	0.91
$\hat{\sigma}_{\tau_A}^2$	2.34	2,34	2.39	2.38	2.43	2.42	2.37	2.34	2.4
A=4000, $n_0 \cong 63.24$									
\hat{R}_{n_0}	126.49	126.49	126.49	126.49	126.49	126.49	126.49	126.49	126.49
Разность рисков	-14.49	-9.79	-2.89	6.71	19.52	37.54	62.05	92.81	102.22
$\hat{\beta}_{\tau_A}$	0.11	0.22	0.32	0.43	0.53	0.64	0.74	0.84	0.92
$\hat{\sigma}_{\tau_A}^2$	1.73	1.75	1.75	1.74	1.74	1.76	1.79	1.79	1.77
A=10 000, $n_0 \cong 100$									
\hat{R}_{n_0}	200	200	200	200	200	200	200	200	200
Разность рисков	-40.2	-35.04	-27.11	-16.72	-2.63	16.79	44.93	79.24	89.46
$\hat{\beta}_{\tau_A}$	0.08	0.19	0.29	0.39	0.49	0.59	0.7	0.8	0.91
$\hat{\sigma}_{\tau_A}^2$	1.68	1.7	1.7	1.7	1.71	1.72	1.72	1.73	1.65

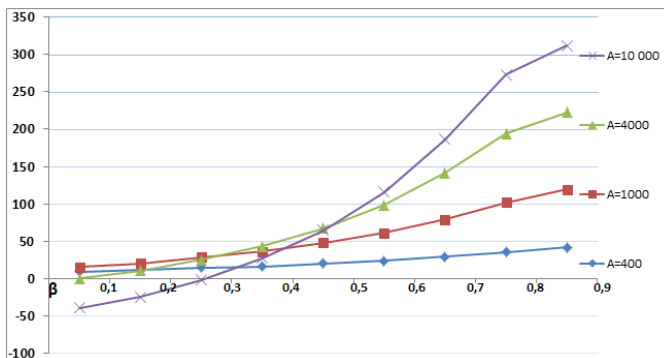


Рис. 1. Разность рисков для случая стандартного нормального распределения

Таблица 2

Смешанное нормальное распределение: $\xi_1 \in N(0, 1)$, $\xi_2 \in N(0, 9)\varepsilon^2 \sim 0.99\xi_1 + 0.01\xi_2, \sigma^2 = 1.08$

β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
A=400, $n_0 \cong 20.78$									
\hat{R}_{n_0}	41.57	41.57	41.57	41.57	41.57	41.57	41.57	41.57	41.57
Разность рисков	-14.65	-14.82	-14.68	-14.09	-12.92	-11.16	-8.98	-6.81	-5.09
$\hat{\beta}_{\tau_A}$	0.09	0.19	0.3	0.42	0.53	0.6	0.7	0.8	0.9
$\hat{\sigma}_{\tau_A}^2$	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.04	1.05	1.03	1.03
A=1000, $n_0 \cong 32.86$									
\hat{R}_{n_0}	65.73	65.73	65.73	65.73	65.73	65.73	65.73	65.73	65.73
Разность рисков	-25.99	-25.93	-23.62	-21.91	-20.75	-16.19	-10.25	-3.27	4.3
$\hat{\beta}_{\tau_A}$	0.04	0.15	0.27	0.37	0.49	0.59	0.72	0.8	0.9
$\hat{\sigma}_{\tau_A}^2$	1.11	1.11	1.11	1.07	1.1	1.1	1.08	1.09	1.1
A=4000, $n_0 \cong 65.73$									
\hat{R}_{n_0}	131.45	131.45	131.45	131.45	131.45	131.45	131.45	131.45	131.45
Разность рисков	-1.45	-2.77	-3.99	-5.24	-6.81	-9.05	-11.49	-11.59	-7.21
$\hat{\beta}_{\tau_A}$	0.02	0.2	0.3	0.39	0.48	0.57	0.7	0.84	0.9
$\hat{\sigma}_{\tau_A}^2$	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15
A=10000, $n_0 \cong 103.92$									
\hat{R}_{n_0}	207.85	207.85	207.85	207.85	207.85	207.85	207.85	207.85	207.85
Разность рисков	-22.09	-24.11	-25.78	-27.42	-29.67	-33.15	-37.03	-36.73	-28.61
$\hat{\beta}_{\tau_A}$	0.07	0.17	0.27	0.4	0.5	0.61	0.7	0.8	0.9
$\hat{\sigma}_{\tau_A}^2$	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09

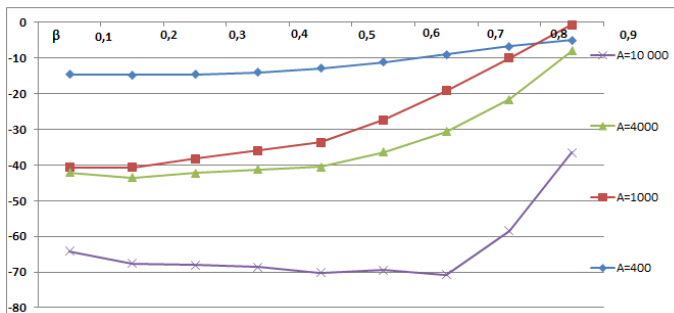


Рис. 2. Разность рисков для случая смешанного нормального распределения с 1% загрязненности

Литература

1. Sriram T., Iaci R. Sequential Estimation for Time Series Models // *Sequential Analysis: Design Methods and Applications*. 2014. V. 33. P. 136–157.
2. Sriram T. Sequential Estimation of the autoregressive parameter in a first order autoregressive process // *Sequential Analysis: Design Methods and Applications*. 1988. V. 7(1). P. 53–74.
3. Sriram T. Sequential Estimation of the Mean of a First-Order Stationary Autoregressive Process // *The Annals of Statistics*. 1987. V. 15. P. 1079–1090.
4. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. М. : Финансы и статистика, 1983. 472 с.
5. Блекуэлл Д., Гиршик М.А. Теория игр и статистических решений / пер. с англ. И.В. Соловьева ; под ред. Б.А. Севастьянова. М. : Издательство иностранной литературы, 1958. 380 с.
6. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка статистических гипотез. М. : Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 472 с.
7. Тартаковский А.Г. Последовательное оценивание параметров и фильтрация случайных процессов // *Проблема передачи информации*. 1982. Т. 18, вып. 4. С. 54–66.

Статистическое моделирование формирования курса валют (на примере китайского юаня и корейского вона)

А.А. Конищева, Т.В. Емельянова

Томский государственный университет
E-mail: koniantonina@yandex.ru

Процесс формирования курса валют представляется суммой низкочастотного детерминированного тренда и высокочастотной стационарной случайной компоненты. Тренды получены методом наименьших квадратов с помощью полиномов и отрезков ряда Фурье.

Ключевые слова: случайный процесс, тренд, метод наименьших квадратов, ряд Фурье.

Введение

Моделирование колебаний обменных курсов валют привлекало внимание многих ученых, как математиков, так и экономистов. Впервые в 1900 г. французский математик Л. Башелье в своей диссертации рассматривал цену как случайный процесс

$$S_t = S_0 + \sum_{i=1}^t \xi_i,$$

где S_t – цена в момент времени t ; S_0 – цена в начальный момент времени $t = 0$; ξ_i – независимые одинаково распределенные случайные величины. В 1953 г. английский статистик М. Кендалл в своей работе [3] приходит к выводу, что независимые величины $\xi_i = \ln S_i - \ln S_{i-1}$ есть приращения логарифмов цен, а не самих цен. Таким образом, в его модели цена – величина неотрицательная, и $S_t = S_0 \exp(\sum_{i=1}^t \xi_i)$. Данный подход получил дальнейшее развитие в работе американского экономиста П. Самуэльсона [4], где он вводит процесс S_t геометрического броуновского движения для описания динамики цен.

В настоящее время широко используются линейные модели формирования курса валют, например, регрессионные модели, такие как авторегрессия порядка p , векторная авторегрессия и другие.

В данной работе обменный курс рассматривается как случайный процесс вида $S_t = A_t + u_t$, где A_t – низкочастотный детерминированный тренд, u_t – высокочастотная стационарная случайная компонента. Эта модель была рассмотрена Е.Л. Кулешовым в статье «Статистическая модель процесса формирования курса валют» [1]. Он применил данную мо-

дель к курсам английского фунта и швейцарского франка. Ввиду того, что на сегодняшний день Китай является одним из главных стратегических партнеров России, а Корея торгово-экономическим партнером, наиболее актуальным было провести анализ таких валют как китайский юань и корейский вон.

Выделение тренда

На реальных данных были сформированы временные ряды – последовательности значений курсов с шагом дискретизации по времени 1 месяц, начиная с октября 2009 и по февраль 2015 г. (всего 65 значений). Каждое значение равно среднемесячному значению курсов.

Для выделения детерминированных трендов данные приближались полиномами методом наименьших квадратов. Метод основан на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомым переменных.

Для набора данных $(x_i, y_i)_{i=1,2,\dots,N}$ требуется найти такой полином степени n

$$p(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \dots + p_n x + p_{n+1},$$

коэффициенты которого являются решением следующей задачи минимизации

$$\min_{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}} \sum_{i=1}^N (p(x_i) - y_i)^2$$

Для оценивания коэффициентов полиномов различных степеней и построения графиков использовалась система Matlab. Также были найдены среднеквадратические ошибки при приближении данных. Так как при увеличении степени полинома ошибка почти всегда уменьшается, было исследовано, какая модель лучше прогнозирует. Были рассмотрены истинные значения курсов за январь–март 2015 года и вычислены прогнозные значения.

Далее представлены примеры полиномов с наименьшей ошибкой прогноза.

1. Юань/Рубль

$$p(x) = 3.8840 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 - 0.0004 \cdot x^3 + 0.0160 \cdot x^2 - 0.1871 \cdot x + 4.8924$$

$$\varepsilon = 9.33$$

Прогнозные значения: r1 = 8.9308 r2 = 9.5197 r3 = 10.1671

Истинные значения: s1 = 10.2606 s2 = 10.3197 s3 = 9.6500

Средняя ошибка прогноза: 0.8823

На рисунке 1 представлена последовательность значений курса китайского юаня (цена юаня в рублях) за период с октября 2009 по февраль 2015 г. и его полиномиальный тренд.

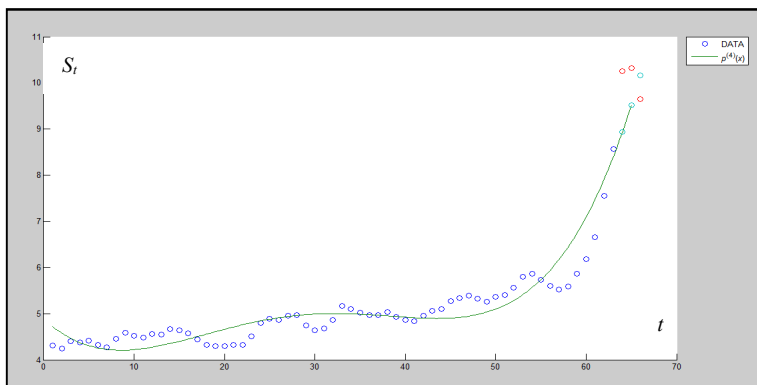


Рис. 1. Значения курса юаня (в рублях) и его тренд

2. Юань/Евро

$$p(x) = 2.4789 \cdot 10^{-9} \cdot x^5 - 3.8669 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2.1444 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0.0005 \cdot x^2 + 0.0054 \cdot x + 0.0913$$

$$\varepsilon = 0.00057$$

Прогнозные значения: $r_1 = 0.1381$ $r_2 = 0.1447$ $r_3 = 0.1527$.

Истинные значения: $s_1 = 0.1381$ $s_2 = 0.1410$ $s_3 = 0.1479$.

Средняя ошибка прогноза: 0.0028.

На рис. 2 представлена последовательность значений курса китайско-го юаня (цена юаня в евро) за период с октября 2009 по февраль 2015 г. и его полиномиальный тренд.

3. Юань/Вон

$$p(x) = 0.0685 \cdot x + 171.588$$

$$\varepsilon = 1977.07$$

Прогнозные значения: $r_1 = 175.9698$ $r_2 = 176.0382$ $r_3 = 176.1067$

Истинные значения: $s_1 = 175.0843$ $s_2 = 176.1131$ $s_3 = 178.3432$

Средняя ошибка прогноза: 1.0656.

На рис. 3 представлена последовательность значений курса китайско-го юаня (цена юаня в вонгах) за период с октября 2009 по февраль 2015 г. и его линейный тренд.

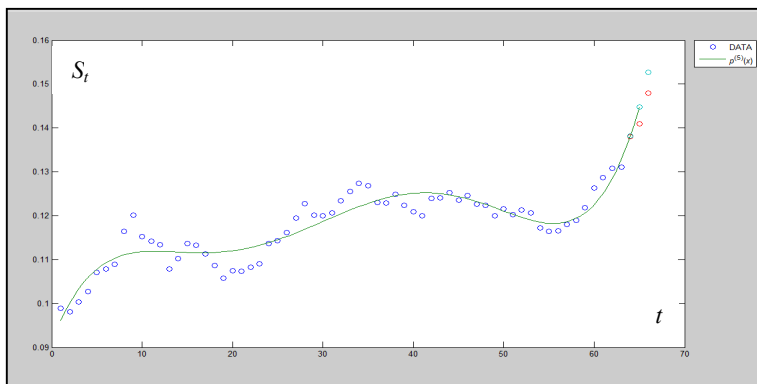


Рис. 2. Значения курса юаня (в евро) и его тренд

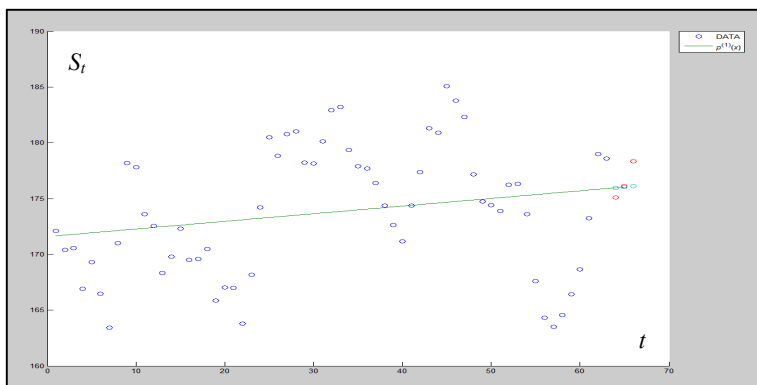


Рис. 3. Значения курса юаня (в вонгах) и его тренд

В итоге, курс юаня в рублях лучше прогнозирует полином четвертой степени, курс юаня в евро лучше аппроксимирует и прогнозирует полином пятой степени, а линейный многочлен дает лучший прогноз для курса юаня в вонгах, несмотря на то, что допущенная ошибка при приближении данных не наименьшая.

Поскольку выборочные данные курсов юаня в евро, юаня в вонгах выглядят достаточно хаотично, можно попытаться аппроксимировать их конечным отрезком ряда Фурье.

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in L_2([-\pi, \pi])$ называют функциональный ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\text{где } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Числа a_0 , a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots$) называются коэффициентами Фурье функции f .

Оценка коэффициентов Фурье производилась по методу наименьших квадратов.

С помощью системы Matlab были построены конечные отрезки ряда Фурье, $k = 1..8$, построены графики и вычислены допущенные ошибки при приближении данных. Также было проведено прогнозирование для каждой модели и выбрана модель с наилучшим прогнозом. Были рассмотрены истинные значения курсов за январь-март 2015 года и вычислены прогнозные данные.

1. Юань/Рубль

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^6 (a_k \cos(kxw) + b_k \sin(kxw)), \quad w = \frac{2\pi}{\max(x) - \min(x)}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= -6.567 * 10^8; \quad a_1 = 9.857 * 10^8; \quad b_1 = 5.56 * 10^8; \quad a_2 = -3.717 * 10^8; \\ b_2 &= -6.149 * 10^8; \quad a_3 = 9.881 * 10^6; \quad b_3 = 3.277 * 10^8; \quad a_4 = 4.742 * 10^7; \\ b_4 &= -9.034 * 10^7; \quad a_5 = -1.633 * 10^7; \quad b_5 = 1.056 * 10^7; \quad a_6 = 1.714 * 10^6; \\ b_6 &= -1.041 * 10^5; \quad w = 0.01592 \\ \varepsilon^2 &= 1.1438 \end{aligned}$$

Прогнозные значения: r1 = 9.8673 r2 = 10.4650 r3 = 9.6653.

Истинные значения: s1 = 10.2606 s2 = 10.3197 s3 = 9.6500.

Средняя ошибка прогноза: 0.1846.

На рис. 4 представлена последовательность значений курса китайско-го юаня (цена юаня в рублях) за период с октября 2009 по февраль 2015 г. и его гармонический тренд.

2. Юань/Евро

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^6 (a_k \cos(kxw) + b_k \sin(kxw)), \quad w = \frac{2\pi}{\max(x) - \min(x)}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 213.4; \quad a_1 = -153.7; \quad b_1 = -342.7; \quad a_2 = -169.1; \quad b_2 = 190.5; \quad a_3 = 124.1; \\ b_3 &= 38.19; \quad a_4 = -6.471; \quad b_4 = -47.01; \quad a_5 = -9.345; \quad b_5 = 6.204; \quad a_6 = 1.146; \\ b_6 &= 0.6448; \quad w = 0.03501. \end{aligned}$$

$$\varepsilon^2 = 0.00022$$

Прогнозные значения: r1 = 0.1367 r2 = 0.1412 r3 = 0.1486.

Истинные значения: s1 = 0.1381 s2 = 0.1410 s3 = 0.1479.

Средняя ошибка прогноза: 0.0008.

На рис. 5 представлена последовательность значений курса китайско-го юаня (цена юаня в евро) за период с октября 2009 по февраль 2015 г. и его гармонический тренд.

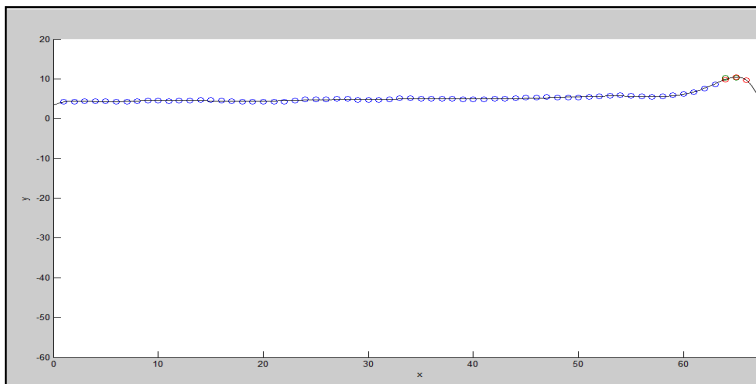


Рис. 4. Значения курса юаня (в рублях) и его гармонический тренд

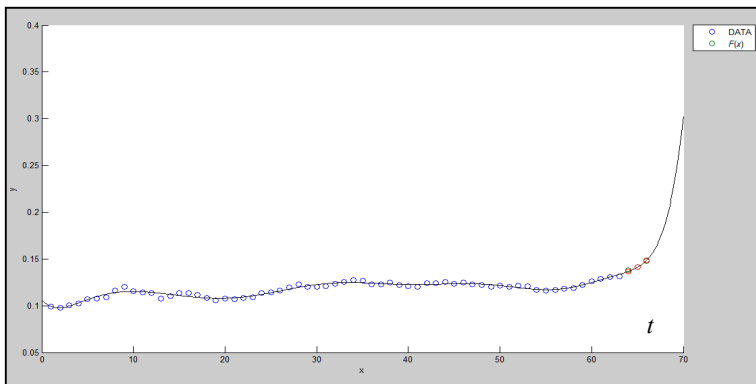


Рис. 5. Значения курса юаня (в евро) и его гармонический тренд

3. Юань/Вон

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^4 (a_k \cos(kxw) + b_k \sin(kxw)), \quad w = \frac{2\pi}{\max(x) - \min(x)}$$

$$a_0 = 174; a_1 = -3.292; b_1 = -1.465; a_2 = 2.798; b_2 = -0.04022; a_3 = 1.232;$$

$$b_3 = -0.1079; a_4 = -2.147; b_4 = -4.347; w = 0.08868.$$

$$\varepsilon^2 = 514.9207.$$

Прогнозные значения: $r_1 = 177.4394$ $r_2 = 178.3278$ $r_3 = 178.5757$.

Истинные значения: $s_1 = 175.0843$ $s_2 = 176.1131$ $s_3 = 178.3432$.

Средняя ошибка прогноза: 1.6008.

На рис. 6 представлена последовательность значений курса китайско-го юаня (цена юаня в вонгах) за период с октября 2009 по февраль 2015 г. и его гармонический тренд.

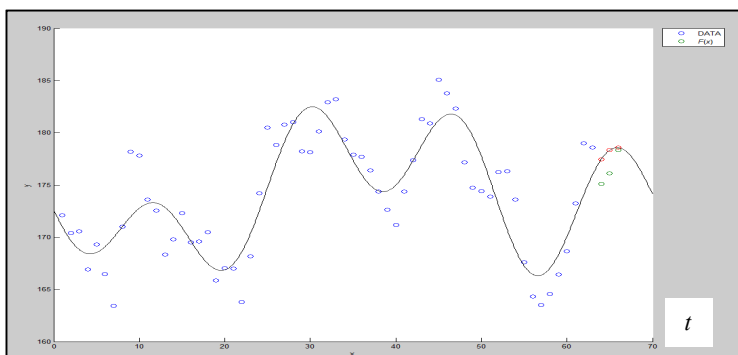


Рис. 6. Значения курса юаня (в вонгах) и его гармонический тренд

В итоге, курс юаня в рублях и курс юаня в евро лучше аппроксимирует и прогнозирует модель при $k = 6$, а курс юаня в вонгах лучше прогнозирует модель при $k = 4$.

Но следует сказать, что рассмотренные модели хорошо подходят для краткосрочных прогнозов, так как на некоторых графиках можно наблюдать резкое падение или резкий рост курса, но, конечно, ожидать таких скачков не следует.

Закключение. Таким образом, статистическими методами у китайско-го юаня и корейского вонга выделены детерминированные тренды методом наименьших квадратов. Также были спрогнозированы значения курсов на январь-март 2015 г.

Литература

1. Кулешов Е.Л. Статистическая модель процесса формирования курса валют // Автометрия. 2013. № 1. С. 50–59.
2. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов. М. : Физматгиз, 1962. 349 с.
3. Kendall M.G. The analysis of economic time-series. Pt. 1: Prices // Journ. Royal Statist. Soc. 1953. Vol. 116, № 1. P. 11–25.
4. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // Industr. Manag. Rev. 1965. Vol. 6, № 2. P. 13–31.

Исследование качества регрессионных моделей колебаний курсов валют

А.А. Шайкина, Е.А. Пчелинцев

Томский государственный университет

E-mail: a.shaykina@mail.ru

Проводится сравнительный анализ двух подходов к оценке качества регрессионных моделей на примере исследования зависимости курсов американского доллара и евро через их относительные курсы к рублю. Установлено, что подход, основанный на анализе эмпирических мостов является более точным, чем подход, основанный на изучении остатков.

Ключевые слова: линейная регрессия, эмпирический мост, анализ остатков.

Введение

В настоящее время для обработки и исследования данных все чаще используется математический аппарат. Наибольшее распространение на практике получил регрессионный анализ, о чем свидетельствует большое число публикаций отечественных и зарубежных авторов. Он позволяет исследовать зависимость одной переменной от другой, а так же её влияние, с учетом некоторой погрешности. Преимущество регрессионных моделей для обработки данных состоит как в простоте их построения, так и в богатстве интерпретаций [1]. Одним из ключевых является вопрос качества построенных моделей.

В данной работе предлагается исследовать качество двух регрессионных моделей, описывающих взаимные влияния колебаний валют. В первом случае колебания логарифма евро повторяют колебания логарифма доллара с точностью до «шума», не зависящего от колебаний доллара, во втором - наоборот, доллар следует за евро. Для проверки качества регрессионных моделей применяются следующие методы: анализ эмпирического моста и анализ остатков [1-4].

Идентификация моделей осуществляется на основе реальных данных (курсов валют) за период с 1 марта 2014 по 1 марта 2015, взятых с официального сайта ЦБ РФ (<http://www.cbr.ru>).

Предполагается, что наблюдения описываются линейной однопараметрической регрессионной моделью следующего вида

$$Y_i = \theta X_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n,$$

где X_i – значения регрессора, $\theta \in \mathbb{R}$ – неизвестный параметр регрессии, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины

с нулевым математическим ожиданием и конечной ненулевой дисперсией σ^2 , Y_i – значения отклика. Для оценивания неизвестного параметра регрессионной модели θ применяется метод наименьших квадратов (МНК), получая оценку $\hat{\theta} = (X'X)^{-1}X'Y$. На основании регрессионной модели строятся прогнозные значения $\hat{Y}_i = \hat{\theta}X_i$. Остатками регрессии называют случайные величины $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

После построения моделей необходимо провести проверку их качества. Исследование качества регрессионных моделей позволяет оценить точность подобранных неизвестных параметров, так же хорошо ли подобрана сама модель, описывающая зависимость. Рассмотрим, далее, подходы к оценке качества модели – анализ эмпирического моста и анализ остатков.

Определение. Эмпирическим мостом называется кусочно-линейная случайная ломанная $\hat{Z}_n = \{\hat{Z}_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ с узлами в точках

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{\hat{\Delta}_{nk} - \frac{k}{n}\hat{\Delta}_{nn}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 n}} \right), \quad (1)$$

где $\hat{\Delta}_{nk} = \hat{\varepsilon}_k$, $k = 1, \dots, n$, $\hat{\Delta}_{n0} = 0$, $\hat{\sigma}^2 = \hat{\varepsilon}^2 - (\bar{\varepsilon})^2$.

Если регрессионная модель некачественно описывает данные, то значения отклика Y_i будут систематически отклоняться от регрессионной кривой, и это отклонение можно выявить суммированием регрессионных остатков. Для изучения значимости этих отклонений необходимо знать предельное распределение процесса центрированных и нормированных частичных сумм регрессионных остатков. Эту процедуру назовем анализом эмпирического моста. Если для описания данных предложено несколько моделей, то вычисление позволяет выбрать модель, наилучшим образом описывающую данные. Можно доказать, что эмпирический мост в модели однопараметрической линейной регрессии сходится к гауссовскому процессу, отличному от стандартного броуновского моста.

Анализ остатков можно провести несколькими способами, проверкой нарушений основных предположений и анализом выбросов [1–2].

Основными предположениями будем считать (2). Предположение о том, что ошибки имеют нулевое среднее, выполняется для остатков автоматически, так как для регрессионной модели со свободным членом

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i = 0.$$

Нарушение предположений о независимости и постоянстве дисперсий ошибок не очень критично. В этих ситуациях можно применять регрессионный анализ, но взвешенный. Более важным является предположение о нормальности ошибок, так как его нарушение приводит к невозможности применения аппарата проверки статистических гипотез. Рассмотрим наличие выбросов.

Выбросом называется опыт, в котором значение отклика плохо, описывается моделью. Существуют формальные критерии выделения выбросов, основанные на анализе остатков.

Так как мы считаем, что остатки должны подчиняться нормальному закону $N(0, MSE)$, то нормализованные остатки

$$\varepsilon_i^H = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{MSE}}$$

должны подчиняться стандартному нормальному закону $N(0,1)$. Тогда подозрительным на выброс являются значения отклика, для которых величины $|\varepsilon_i^H| > 2$ и очевидными выбросами по правилу трех-сигм при $|\varepsilon_i^H| > 3$ [2]. Если обнаружен выброс, то его не всегда возможно автоматически исключить. Выброс – экспериментальная точка, которая не типична по отношению к остальным данным. Каждое такое наблюдение должно подвергаться тщательному исследованию с целью выяснения причин его возникновения. Полезно изучить положение точки (кандидата на выброс) на графиках однофакторных зависимостей отклика от факторов, оказывающих наибольшее влияние на отклик [2].

Основные результаты работы

Для построения регрессионных моделей для наблюдений, описанных выше, введем следующих обозначения

$$\xi_i = \ln \frac{A_i}{A_{i-1}},$$

где A_i – значение курса евро,

$$\eta_i = \ln \frac{B_i}{B_{i-1}},$$

где B_i – значение курса доллара, $i = 2, n$. В результате, полученные значения ξ_i и η_i образуют два вектора ξ и η . Таким образом, получаем две модели. Первая модель:

$$Y_i^{(1)} = \theta X_i^{(1)} + \varepsilon_i,$$

где $X_i^{(1)} = \xi_{i:n}$ – порядковые статистики (регрессор), а $Y_i^{(1)}$ – соответствующие значения η_i (индуцированные порядковые статистики). Иначе можно записать так

$$\eta_i = \theta \xi_{i:n} + \varepsilon_i;$$

вторая модель:

$$Y_i^{(2)} = \gamma X_i^{(2)} + \delta_i,$$

где $X_i^{(2)} = \eta_{i:n}$ – порядковые статистики (регрессор), а $Y_i^{(2)}$ – соответствующие значения ξ_i . Иначе можно записать так

$$\xi_i = \gamma \eta_{i:n} + \delta_i.$$

Здесь $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ – неизвестные параметры регрессий, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – регрессионные ошибки первой модели, а $\delta_1, \dots, \delta_n$ – регрессионные ошибки второй модели. Порядковые статистики необходимы для того, чтобы проверить предположение о линейной зависимости отклика от регрессора по всем значениям регрессора от наименьших до наибольших. Если при этом наблюдается отклонение от линейности, то нужно узнать, с чем это может быть связано [3].

На основе исходных данных в пакете MatLab вычислены оценки МНК неизвестных параметров $\hat{\theta} = 0,0357$ и $\hat{\gamma} = 0,0431$, так же для каждой из моделей были рассчитаны выборочные корреляции регрессора и регрессионных остатков. Для первой модели выборочный коэффициент корреляции $|r(X_i^{(1)}, \varepsilon_i)| < 4,5 \cdot 10^{-4}$, а для второй модели $|r(X_i^{(2)}, \delta_i)| < 4,9 \cdot 10^{-5}$. В обоих случаях корреляция достаточно близка к нулю, что позволяет дальше проводить статистические исследования [4].

На графиках представлены эмпирические мосты для изучаемых моделей.

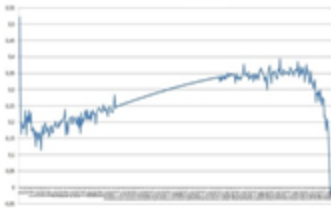


Рис. 1. График эмпирического моста для первой модели

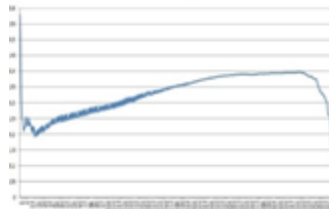


Рис. 2. График эмпирического моста для второй модели

Для сравнения моделей применим критерий хи-квадрат, для этого введем обозначения. Пусть $d > 0$ – целое число. Обозначим

$$\vec{q}_n = \left(\hat{Z}_n \left(\frac{1}{d+1} \right), \dots, \hat{Z}_n \left(\frac{d}{d+1} \right) \right),$$

тогда

$$\vec{q}_n \Rightarrow \vec{q}_F = \left(Z_F^0 \left(\frac{1}{d+1} \right), \dots, Z_F^0 \left(\frac{d}{d+1} \right) \right).$$

Обозначим через A ковариационную матрицу вектора \vec{q}_F . Если $\det A \neq 0$, то, как известно, $q_n A^{-1} q_n^T \Rightarrow \chi_d^2$ при $n \rightarrow \infty$, где χ_d^2 – распределение хи-квадрат с d степенями свободы [3].

В качестве d , как и в [3], возьмем $d = [n]^{1/3} + 1$ и вычислим значения статистики $q_n A^{-1} q_n^T$ для каждой из моделей. В результате получаем, для первой модели значение статистики хи-квадрат получилось равным 107,3941, а для второй 74,5091. Значение для второй модели меньше и далее будем рассматривать ее.

Заметим, что в данном случае на 8 наблюдении происходит структурное изменение траектории, т.е. наблюдается значительное падение, затем скачок, после чего функция стала монотонно возрастающей. Поэтому разобьем первоначальную выборку на две части с номерами 1–8 и 8–365. На первом участке значение статистики хи-квадрат получилось равным 7,5617. А на втором участке 193,9827. При этом анализ эмпирического моста на втором участке позволяет выделить еще два подинтервала. В итоге получаем разбиение исходной выборки на три интервала 1–8, 8–326 и 326–365. Результаты вычислений, а именно число степеней свободы, значения хи-квадрат, значение оценки параметра, а также реально достигнутый уровень значимости, приведены в таблице ниже. Значения реально достигнутого уровня значимости (РДУЗ) получены с помощью [5].

Результаты вычислений для второй модели

Интервал	$\hat{\theta}$	d	χ^2	РДУЗ
1–8	0,001	3	7,562	0,352
8–326	-0,042	8	224,093	2,753
326–365	0,0498	4	37,775	0,711

Описанный эффект имеет достаточно простую интерпретацию: курсу доллара свойственны небольшие скачки, как отрицательные так и положительные, но при этом при росте и падении курса наблюдается монотонность.

Итак, в результате исследований обнаружено, что логарифмы для евро ξ_i в среднем интервале пропорциональны η_i с коэффициентом $-0,0416$ и случайной погрешностью; в крайних зонах, коэффициент пропорциональности положительный. Таким образом, модель, описывающая зависимость евро от доллара, близка к реальности и подтверждает зависимость именно евро от доллара, а не наоборот.

При исследовании качества моделей с помощью анализа остатков рассматривается только случай наличия выбросов, так как нарушениями основных предположений можно пренебречь [2].

Проведем первичный анализ на выбросы, рассматривая графики отклонения истинных значений от модельной кривой. На рисунке 3 видно, что на графике для первой модели есть выбросы как в начале так и в кон-

це графика. В конце графика выброс обусловлен систематическим отклонением, можно предположить, что это связано с некоторыми экономическими факторами. На рис. 4, так же имеются выбросы в конце и начале графика, которые так же связаны с какими-либо внешними факторами.

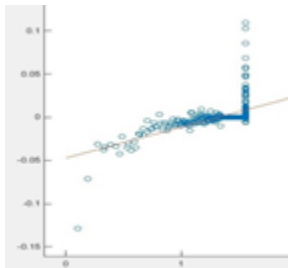


Рис. 3. График остатков первой модели

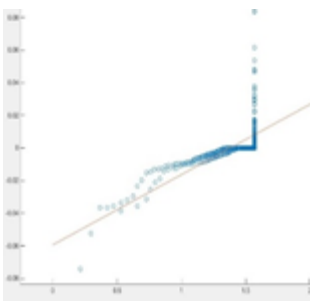


Рис. 4. График остатков второй модели

В результате первичного анализа существенных выбросов не обнаружено, для более точных результатов проведем вторичный – статистический анализ аппроксимации данных. Для этого были рассчитаны нормализованные остатки ε_i^H , которые, должны подчиняться нормальному закону распределения. После расчетов были выявлены подозрительные на выброс значения, для первой модели равное 2,7, для второй модели 2,43. Очевидных выбросов не оказалось. Из этого можно сделать вывод, что выбросы есть, но они незначительные, значит ими можно пренебречь.

Если сравнить результаты первичного и вторичного анализа, то можно сказать, что выбросы обусловлены некоторыми внешними факторами, которые повлияли на такие результаты. Скорее всего, это связано с тем,

что в тот промежуток времени, за который были взяты данные курсов, был резкий скачок курсов валют доллара и евро относительно рубля, что и привело к таким результатам.

Таким образом, на основе проведенного анализа, следует, что модели достаточно хорошо аппроксимируют данные и с помощью них можно спрогнозировать поведение валют в тот или иной промежуток времени.

В ходе статистических исследований получили, что теоретически, с помощью выше предложенных моделей, можно спрогнозировать как курс доллара, зная евро, так и наоборот. Но анализ эмпирических мостов показал, что для прогнозирования больше подходит вторая модель описывающая зависимость евро.

Литература

1. Айвазян С., Мхитарян В. Прикладная статистика и основы эконометрики. М. : Юнити-дата, 2001. 656 с.
2. Коновалов Ю.В. Статистическое моделирование с использованием регрессионного анализа: Электронное учебное издание. М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 72 с.
3. Шаталин Е.В. Исследование регрессионных моделей зависимости курсов американского доллара и евро с помощью эмпирического моста / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2014. 6 с.
4. MacNeill I.B. Limit processes for sequences of partial sums of regression residuals // Ann. Prob. 1978. Vol. 6, № 4. P. 695–698.
5. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М. : Наука, 1983. 417 с.

Об оценке спектральной плотности

О.А. Вежнина, Т.В. Емельянова

Томский государственный университет
E-mail: Lesya_Shemetova@mail.ru

Проводится сравнение последовательной оценки с оценкой, полученной путем сглаживания периодограммы с помощью окон Бартлета.

Ключевые слова: спектральная плотность, периодограмма, сглаженные оценки.

Спектральная плотность, представляющая собой преобразование Фурье ковариационной функции стационарного случайного процесса, определяет свойства процесса и позволяет анализировать его структуру. В связи с этим разработка методов построения и статистического анализа оценок спектральных плотностей является одной из главных проблем в спектральном анализе случайных процессов [5].

В работе [3] рассматривалась задача оценивания спектральной плотности стационарного случайного процесса, задаваемого уравнением

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

где $\theta > 0$ – неизвестный параметр, W_t – винеровский процесс.

Если начальное условие X_0 распределено нормально $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\theta}\right)$, то решение уравнения (1) является стационарным процессом в широком смысле [2]. Спектральная плотность случайного процесса определяется формулой

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\theta^2 + \lambda^2}.$$

В [3] предлагается использовать для оценивания параметра θ процесса X_t последовательный план $(\tau(H), \hat{\theta}_\tau)$, где

$$\tau(H) = \inf\left(t: \int_0^t X_s^2 ds \geq H\right), \quad H = \text{const},$$
$$\hat{\theta}_\tau = \frac{1}{H} \int_0^{\tau(H)} X_s dX_s \quad [2].$$

Также одной из важных задач является прогнозирование значений стационарного процесса $X(t)$ по его наблюдениям на конечном временном интервале.

С математической точки зрения она состоит в том, чтобы в подпространстве $\mathcal{H}(T)$ (линейном замыкании величин X_k , $k = \overline{1, n}$, $t \in T$, значе-

ния которых известны) найти величины $\hat{X}(s) = \{\hat{X}_k(s)\}_{k=1, \dots, n}, s \neq T$, обладающие тем свойством, что

$$E\|X(s) - \hat{X}(s)\|^2 = \min.$$

Данный вопрос изучался в [4], там приведены формулы для лучшего прогноза. Оценим точность прогноза, если неизвестный параметр θ заменить его последовательной оценкой $\hat{\theta}$, которая имеет нормальное распределение $\hat{\theta} \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{H}\right)$, σ^2 предполагаем известным.

Точность прогноза имеет вид

$$E|\hat{X}(s) - X(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{H}} \cdot e^{-\theta(s-\tau)} \sqrt{e^{\frac{2(s-\tau)^2}{H}} - 2e^{\frac{(s-\tau)^2}{2H}} + 1}. \quad (2)$$

Среднеквадратическая точность прогноза определяется формулой:

$$E|\hat{X}(s) - X(s)|^2 \leq \sqrt{EX^4(\tau) \cdot e^{-2\theta(s-\tau)}} \cdot \sqrt{e^{\frac{8(s-\tau)^2}{H}} - 4e^{\frac{9(s-\tau)^2}{2H}} + 6e^{\frac{2(s-\tau)^2}{H}} - 4e^{\frac{(s-\tau)^2}{2H}} + 1}. \quad (3)$$

Заметим, что если $s = \tau$, то корень в первом и во втором случае стремится к нулю, $e^{-\theta(s-\tau)}$ и $e^{-2\theta(s-\tau)}$ стационарные величины, которые не зависят от оценки и также стремятся к нулю, следовательно, погрешность прогноза случайного процесса равна нулю.

Чем s от τ дальше, тем больше растет корень, и соответственно погрешность, что абсолютно естественно. Погрешность прогноза можно контролировать, увеличивая порог H .

Численное моделирование последовательного оценивания параметра θ методом максимального правдоподобия проводилось при шаге разбиения $\Delta t = 0,05$, параметр $\sigma^2 = 1$, величина порога $H = 15$ и $H = 25$. В результате эксперимента при истинном значении θ и порога H , получили оценку $\hat{\theta}_\tau$.

На рис. 1 приводятся графики спектральной плотности с $\theta = 0,2$ (сплошная линия) и ее оценки $\hat{\theta}_\tau$ (пунктирная линия). При задаваемом пороге $H = 15$ оценка равна $\hat{\theta}_\tau = 0,32$.

На рисунке 2 приводятся графики спектральной плотности с $\theta = 0,2$ (сплошная линия) и ее оценки $\hat{\theta}_\tau$ (пунктирная линия). При задаваемом пороге $H = 25$ оценка равна $\hat{\theta}_\tau = 0,25$.

Как видно из графиков, с ростом порога H точность прогноза возрастает.

При построении оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов также применяются периодограммные методы. Оценкой для спектральной плотности $g(\lambda)$ будет функция

$$\hat{g}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-i\lambda k} \right|^2,$$

называемая периодограммой [1].

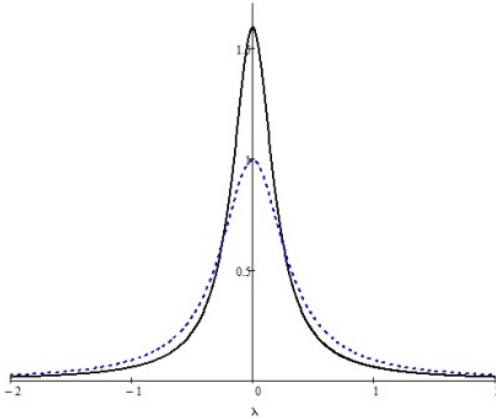


Рис. 1. Оценка плотности стационарного случайного процесса

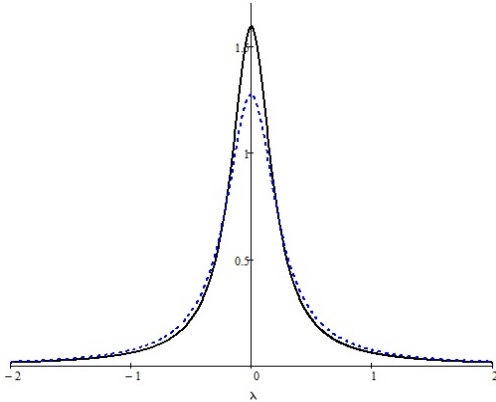


Рис. 2. Оценка плотности стационарного случайного процесса

Для получения состоятельных оценок спектральных плотностей, как правило, используется метод сглаживания периодограмм спектральными окнами $W_N(\cdot)$, $N \in \mathbb{N}$, т.е. используются оценки вида

$$\hat{g}_N^W(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda - \nu) \hat{g}_N(\nu) d\nu.$$

Рассмотрим оценки Бартлета, которые строятся с помощью окон $W_N(\lambda) = a_n B(a_n \lambda)$, где

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}} \right|^2, B(0) = \frac{1}{2\pi},$$

а a_n возрастающая последовательность, где $a_n/N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$).

С помощью численного моделирования проведено сравнение последовательной оценки с оценкой, полученной путем сглаживания периодограммы с помощью окон Бартлета.

Численное моделирование оценок Бартлета и последовательного оценивания параметра θ методом максимального правдоподобия проводилось при шаге разбиения $\Delta t = 0,05$, параметр $\sigma^2 = 1$, величина порога $H = 15$. При этом оценка плотности имеет вид (рис. 3).

На рис. 3 приводятся графики спектральной плотности с $\theta = 0,2$ (пунктирная линия), ее последовательной оценки $\hat{\theta}_\tau = 0,32$ (сплошная жирная линия) и оценки Бартлета (сплошная тонкая линия).

Численное моделирование показывает, что последовательная оценка лучше оценки, полученной путем сглаживания периодограммы окнами Бартлета. Это объясняется еще и тем, что в случае последовательного оценивания имеется больше априорной информации о наблюдаемом процессе.

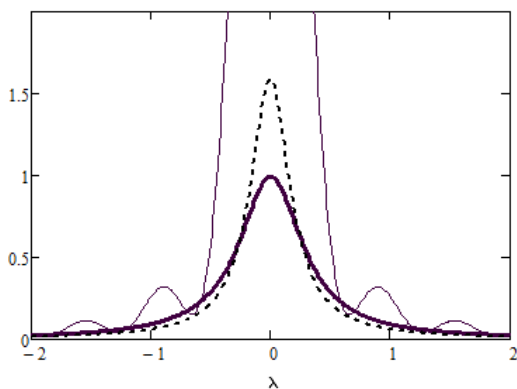


Рис. 3. Оценка плотности стационарного случайного процесса

В данной работе оценивается точность и среднеквадратическая точность прогноза стационарного случайного процесса. Если неизвестный параметр θ заменить его оценкой $\hat{\theta}$, то точность прогноза будет иметь вид (2), а среднеквадратическая точность прогноза (3). С помощью имитационного моделирования произведено сравнение последовательных оценок спектральной плотности с оценками, полученными путем сглаживания периодограммы окнами Бартлета.

Литература

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М. : Физматлит, 2003. 399 с.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М. : Наука, 1974. 696 с.
3. Научная конференция студентов механико-математического факультета ТГУ: Сборник конференции (Томск, 24–30 апреля 2014 г.). Томск: Томский государственный университет, 2014. 89 с.
4. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. М., 1963. 284 с.
5. Семенчук Н.В., Дейцева А.Г. Реализация алгоритма Маллата для вычисления вейвлетных оценок спектральных плотностей / Научная библиотека Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. 2011. URL: <http://www.elib.grsu.by/doc/3524> (дата обращения: 20.05.2015).
6. Семенчук Н.В. Уменьшение смещения вейвлетной оценки спектральной плотности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6 (26).

Статистические проблемы языка

А.В. Завьялова

Томский государственный университет

E-mail: zavjalova.alisa@rambler.ru

Проведен анализ частот употребления букв русского языка в научных статьях математического и философского направлений, с целью показать, что частоты существенно зависят не только от длины текста, но и от характера текста. Для анализа были выбраны тексты, для которых были рассчитаны частоты употребления каждой буквы, которые в дальнейшем сравнивались между собой по критерию Стьюдента. Результаты показали, что тексты выбранных тематик, действительно имеют принципиальные отличия.

Ключевые слова: статистический анализ, частота употребления букв, критерий Стьюдента.

Речь – исторически сложившаяся форма общения людей посредством языковых конструкций, создаваемых на основе определённых правил. Под речью понимают как процесс говорения (речевую деятельность), так и его результат (речевые произведения, фиксируемые памятью или письмом) [1]. Известно, так же, что речь представляет собой психолингвистический процесс. Письменная речь охватывает языковые средства выражения мысли. На формирование письменной речи влияют самые различные обстоятельства: знания грамматики и литературы, профессия, местные диалекты и даже заболевания центральной нервной системы. Письменная речь, как и любое общественное явление, имеет свою языковую форму, в которую облечен ее смысл, – языковые средства, материализуют содержащиеся в ней мысли в виде словарного состава. [2] А это значит, что частота употребления слов может многое рассказать о человеке. Однако слова состоят из букв, и, следовательно, частота употребления тех или иных букв так же может об этом свидетельствовать.

На сегодняшний момент, начиная с XX в. проблема исследования языка в лингвистике, а позднее в психолингвистике, а так же в психологии и математике приобрела особую актуальность. Язык стал рассматриваться и как основное средство осуществления речевой коммуникации, и как феномен развития человека [2]. Стоит отметить, что нередко текст рассматривают как дискурсивное единство, то есть специфический способ и правила организации речевой деятельности, независимо письменной или устной, обладающее многообразной смысловой структурой, порождающей новые смыслы и т.д. Но можно подойти к тексту принципиально с иной стороны, и тогда текст, прежде всего, будет рассматривать-

ся как формально-логическое образование, которое можно исследовать некоторыми статистическими методами. [3]

Постановка задачи: проанализировать, есть ли зависимость частот употребления букв русского языка от типа текста.

В настоящей работе проведен анализ частот употребления букв русского языка в научных статьях математического и философского направлений. Для анализа были выбраны 70 текстов (35 математических и 35 философских), для которых были рассчитаны частоты употребления каждой буквы (в процентах), которые в дальнейшем сравнивались между собой по критерию Стьюдента, для того что бы увидеть значимо ли они отличаются.

Частота каждой буквы в процентном выражении определялась следующим образом: подсчитывалось сколько раз буква встречается в тексте, затем полученное число делилось на общее число символов текста и умножалось на 100.

Поскольку мы располагаем необходимыми нам данными, можем приступить к анализу текстов по критерию Стьюдента.

Сначала проверяем нулевую гипотезу (H_0), которая отвергает эффект (разница средних равняется нулю) в популяции. Затем определяем альтернативную гипотезу (H_1), которая принимается, если нулевая гипотеза неверна.

Итак:

$H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$ нулевая гипотеза свидетельствует о равенстве средних значений;

$H_1: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$ альтернативная, о том, что средние значения имеют принципиальные отличия.

Статистика критерия:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s \times \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t_{(n_1+n_2-2)},$$

где

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \times s_1^2 + (n_2 - 1) \times s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Вычисленное значение t проверяют на предмет попадания в критическую область. При попадании статистики критерия в критическую область, нулевая гипотеза отклоняется. Обычно критическая область выбирается так, чтобы попадание в неё статистики критерия имело:

а) низкую вероятность, когда нет оснований для отклонения нулевой гипотезы;

б) высокую вероятность, когда нулевая гипотеза отклоняется.

Назначение уровня значимости, равного α , означает вероятность попадания статистики критерия в критическую область при верной нулевой гипотезе.

Для принятия решения об отклонении или не отклонении нулевой гипотезы необходимо также определить критическую область проверки гипотезы, здесь правосторонняя: $(x_{1-\alpha}; +\infty)$. Важным этапом проверки статистических гипотез является определение уровня статистической значимости α , т.е. максимально допускаемой исследователем вероятности ошибочного отклонения нулевой гипотезы. В настоящем исследовании для проверки гипотез уровень значимости был взят равный 0,05.

Все статистики критерия подчиняются известным теоретическим распределениям вероятности. Значение статистики критерия, полученное из выборки, связывают с уже известным распределением, которому она подчиняется, чтобы получить значение p . Значение p – это вероятность получения нашего вычисленного значения критерия или его еще большего значения, если нулевая гипотеза верна. Иными словами, p – это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна.

Нулевая гипотеза всегда относится к популяции, представляющей больший интерес, нежели выборка. В рамках проверки гипотезы мы либо отвергаем нулевую гипотезу и принимаем альтернативу, либо не отвергаем нулевую гипотезу. Следует решить, сколько аргументов позволят отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной. Чем меньше значение p , тем сильнее аргументы против нулевой гипотезы. Большинство компьютерных пакетов обеспечивают автоматическое вычисление двустороннего значения p . Если $p < 0,05$, ($=0,05$) то аргументов достаточно, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу, и сказать, что результаты значимы на 5% уровне. И напротив, если $p > 0,05$, то аргументов недостаточно, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу. Не отвергая нулевую гипотезу, можно заявить, что результаты не значимы на 5% уровне. Данное заключение не означает, что нулевая гипотеза истинна, просто недостаточно аргументов (возможно, маленький объем выборки), чтобы ее отвергнуть.

Для простоты анализа все расчеты по критерию Стьюдента проводились в пакете программ «R: анализ и визуализация данных».

Результаты показали, что тексты выбранных тематик, действительно имеют принципиальные отличия в употреблении следующих букв: «и», «с», «х», «ц» и «ъ». Также стоит отметить, что наибольшая относительная разница частот употребления букв соответствует букве «ф», с преоб-

ладанием в математических текстах, и буквой «ж» в текстах философского направления. Предметом бедующих исследований является установление зависимости между частотами употребления букв и правилами организации речевой деятельности в представленных текстах, на основании полученных данных.

Литература

1. Крылов И.Ф. Криминалистика. 2013. URL: http://adhdportal.com/book_1420.html (дата обращения: 13.05.2015).
2. Глухов В.П., Ковшиков В.А. Психоллингвистика. Теория речевой деятельности. М. : Высш. школа, 2007. 320 с.
3. Щеглова А. Методы статистического анализа текста // Библиофонд. Электронная библиотека студента. 2010. URL: <http://bibliofond.ru/view.aspx?id=514585> (дата обращения: 11.05.2015).

Совпадение индуцированной и порядковой топологий на подмножестве «двойной стрелки»

Н.П. Головина, Т.Е. Хмылева

Томский государственный университет
E-mail: breakfast@sibmail.com

Пусть D – «двойная стрелка». В данной работе рассматривается на подмножестве $X \subset D$ индуцированная и порядковая топологии. Вводятся определения порядковой и индуцированной топологий. Доказывается теорема о необходимом и достаточном условии совпадения индуцированной и порядковой топологий на X .

Ключевые слова: «двойная стрелка», индуцированная топология, порядковая топология.

Определение 1. Положим $D = C_0 \cup C_1 \subset \mathbb{R}^2$, где $C_0 = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\}$ и $C_1 = \{(x, 1) : 0 \leq x < 1\}$.

Возьмем на X топологию, порожденную базой, состоящей из множеств вида $\{(x, i) \in D : x_0 - \frac{1}{k} < x < x_0 \text{ и } i = 0, 1\} \cup \{x_0, 0\}$, где $0 < x_0 \leq 1$ и $k = 1, 2, \dots$, а также из множеств вида $\{(x, i) \in D : x_0 < x < x_0 + 1/k \text{ и } i = 0, 1\} \cup \{x_0, 1\}$, где $0 < x_0 \leq 1$ и $k = 1, 2, \dots$,

Так полученное пространство X называется «двойной стрелкой».

Определение 2. Пусть элементы $a, b \in X$ и $a < b$, интервалом (a, b) называется множество всех элементов, удовлетворяющих строгому неравенству $a < x < b$.

Например, «двойная стрелка» будет линейно упорядоченным пространством, если на нем заведем порядок $(x_1, i_1) \leq (x_2, i_2)$, тогда и только тогда, когда либо $x_1 < x_2$, либо $x_1 = x_2$ и $i_1 < i_2$.

Определение 3. Пусть Y – линейно упорядоченное множество, $X \subset Y$ и $a, b \in X$.

Введем обозначение: $(a, b)_X = (a, b) \cap X = \{x : x \in X \text{ и } a < x < b\}$. Соответственно $(a, x_0]_X = (a, x_0] \cap X$ и $[x_0, b)_X = [x_0, b) \cap X$.

Определение 4. Пусть D – «двойная стрелка», $X \subset D$. Определим на X порядковую топологию τ_0 . База окрестности точки $x_0 \in X$ в этой топологии определяется следующим образом: $\mathcal{P}(x_0) = \{(a, b)_X : a, b \in X, a < x_0 < b\}$, если x_0 не первый и не последний элемент. Если x_0 первый элемент, то $\mathcal{P}(x_0) = \{[x_0, b)_X : b > x_0, b \in X\}$ а если x_0 последний элемент, то $\mathcal{P}(x_0) = \{(a, x_0]_X : a < x_0, a \in X\}$.

В индуцированной топологии τ_i база окрестности точки x_0 определяется так: $\mathcal{J}(x_0) = \{(a, b) \cap X \mid a, b \in D, a < x_0 < b\}$.

Пространство X с этими топологиями обозначается (X, τ_0) и (X, τ_i) соответственно.

Поскольку пространство D сепарабельно, каждая точка x_0 обладает счетной базой окрестностей $\mathcal{P}(x_0) = \{(a_n, b_n)_X \mid a_n, b_n \in X\}$, причем можно считать, что $a_n \leq a_{n+1}$ и $b_{n+1} \leq b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Описанная в “двойной стрелки” топология совпадает с порядковой топологией. Каждое подмножество $X \subset D$ линейно упорядоченное, и на X можно рассматривать две топологии: индуцированную из $D - \tau_i$ и порядковую τ_0 .

Возникает вопрос, на каких подмножествах эти топологии совпадают. Ответом на этот вопрос будут следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $X \subset D$, X – произвольное подмножество. Тогда $\tau_0 \leq \tau_i$.

Доказательство: Пусть $X \subset D$, X – произвольное подмножество. Пусть x_0 не первый, и не последний элемент. Если же x_0 первый или последний элемент в X , то вместо окрестности $(a, b)_X$ нужно рассматривать окрестность $[x_0, b)_X$ или $(a, x_0]_X$ соответственно.

Возьмем произвольную окрестность точки x_0 в порядковой топологии, то есть $(a, b)_X$, где $a < x_0 < b$, $a, b \in X$. Поскольку $(a, b)_X = (a, b) \cap X$, а интервал (a, b) является окрестностью точки x_0 в D , то $(a, b)_X$ – окрестность точки x_0 и в индуцированной топологии. Следовательно, $\tau_0 \leq \tau_i$.

Заметим, что в D существуют подмножества, для которых $\tau_0 \neq \tau_i$ и $\tau_0 = \tau_i$.

Пример 1. $X \subset D$, $X = \{(x, 0), x \in (0, 1]\}$

Тогда база окрестности точки $(x_0, 0)$ в порядковой топологии: $\mathcal{P}(x_0, 0) = \{((a, 0), (b, 0))_X, a < x_0 < b\}$, то есть порядковая топология совпадает с евклидовой топологией прямой.

В индуцированной топологии рассмотрим окрестность точки $(x_0, 1)$ вида: $((a, 0), (x_0, 1)) \cap X$, где $a < x_0$. Эта окрестность совпадает с множеством $(a, x_0] \times \{0\}$ и, нетрудно видеть, не содержит никакой окрестности порядковой топологии. Следовательно, $\tau_0 \neq \tau_i$.

Пример 2. $X \subset D$, $X = \left\{1 - \frac{1}{n}, 1\right\} \cup \{1, 0\}$

Тогда $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)$, где $n \in \mathbb{N}$ – изолированные точки в τ_0 и в τ_i . А точка $\{1, 0\}$ является предельной точкой в τ_0 и в τ_i .

Получается, что порядковая топология и индуцированная топология равны.

Теорема 2. Пусть $X \subset D$, X замкнутое подмножество в D , тогда $\tau_0 = \tau_i$.

Доказательство: Пусть $X \subset D$, X замкнутое подмножество в D , следовательно X – компакт в D .

Формально тождественное отображение $\varphi: (X, \tau_i) \rightarrow (X, \tau_0)$, $\varphi(x, i) = (x, i)$, так как по теореме 1, φ – отображение из более сильной топологии в более слабую топологию, то φ непрерывно.

Поскольку φ – биекция, то существует обратное отображение $U = \varphi^{-1}: (X, \tau_0) \rightarrow (X, \tau_i)$.

Для замкнутого $F \subset (X, \tau_0)$, $U^{-1}(F) = \varphi(F)$ – компактно, так как F – компакт и φ – непрерывно. Следовательно для отображения U прообраз замкнутого множества F – замкнут и, значит $U = \varphi^{-1}$ – непрерывно. Следовательно $\varphi: (X, \tau_i) \rightarrow (X, \tau_0)$ – гомеоморфизм и, значит $\tau_0 = \tau_i$.

Теорема 3. Пусть $X \subset D$, X незамкнутое подмножество в D . Топология $\tau_0 < \tau_i$, тогда и только тогда, когда, либо для некоторой последовательности $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, существует $\sup_X x_n$ такой, что $\sup_D x_n < \sup_X x_n$, либо для некоторой последовательности $y_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, существует $\inf_X y_n$ такой, что $\inf_D y_n > \inf_X y_n$.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $X \subset D$, X незамкнутое подмножество, $\tau_n < \tau_i$. В этом случае существует точка $x_0 \in X$ и ее окрестность $U(x_0) = (a, b) \subset (X, \tau_n)$ такая, что для каждой окрестности $V(x_0) \subset (X, \tau_n)$, $V(x_0) \not\subset U(x_0)$. Отсюда следует, что либо $[a, x_0) \cap X = \emptyset$, либо $(x_0, b] \cap X = \emptyset$, действительно, если существует $x' \in [a, x_0) \cap X$ и $x'' \in (x_0, b] \cap X$, то окрестность в порядковой топологии $(x', x'')_X \subset (a, b)$ – окрестность в индуцированной топологии.

1) Пусть $(x_0, b] \cap X = \emptyset$ и x_0 не является последним элементом.

Поскольку пространство X с первой аксиомой счетности, то точка x_0 обладает счетной базой окрестностей $\mathcal{P}(x_0) = (a_n, b_n)_X$, $a_n, b_n \in X$, $b_n > b$. Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{a_n\}$ неубывающая, $a_n \leq a_{n+1}$, а последовательность $\{b_n\}$ невозрастающая, $b_{n+1} \leq b_n$.

Тогда возможны два случая:

а) $\beta = \inf\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\} < b_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ в этом случае $\beta \in D \setminus X$, $\beta \geq b$ и $\inf_X\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\} = x_0$, а $\inf_D\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \beta$.

b) $\inf\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\} = b_{n_0}$. Тогда окрестность $(a_n, b_n)_X$ начиная с n_0 совпадает с $(a_n, x_0]_X$. Поскольку $(a_n, x_0]_X = (a_n, b_n)_X \not\subset (a, b) \cap X$, то $a_n < a \quad n \geq n_0$.

Если у $\{a_n\}$ есть наибольший элемент, то $\max\{a_k \mid k \geq n_0\} = a_{k_0}$, то окрестность $(a_{k_0}, x_0]_X = \{x_0\} \subset (a, b) \cap X$, что противоречит условию. Следовательно у последовательности $\{a_n\}$ нет максимума, но существует $\sup_D a_n = \alpha$, где $\alpha = D/X$. Очевидно, что $\alpha \leq a$, а $\sup_X a_n = x_0$.

2) $[a, x_0) \cap X = \emptyset$ и x_0 не является ни первым и ни последним элементом. Доказательство в этом случае будет аналогично.

Достаточность. Пусть $X \subset D$, X незамкнутое подмножество. Возьмем последовательность $x_n \in X \quad n \in \mathbb{N}$ и точки $x_0 \in X, d \in D$.

Тогда существует $\sup_X x_n = x_0$ и $\sup_D x_n = d, x_0 > d$.

Окрестность точки x_0 в порядковой топологии $(x_n, x_0]_X$, а в индуцированной топологии (d, x_0) , и $(x_n, x_0]_X \not\subset (d, x_0)$. Следовательно $\tau_0 \neq \tau_1$.

Литература

1. Энгелькинг Р. Общая топология : учебник / пер. с англ. [и предисл.] М.Я. Антоновский, А.В. Архангельский. М. : Мир, 1986. 751, [1] с.: ил. 22 см

Исследование раздельно непрерывных и квазинепрерывных функций

В.Г. Клековкин, Т.Е. Хмылева

Томский государственный университет
E-mail: klekovkin.vladislav@gmail.com

Рассматривается взаимосвязь раздельно непрерывных и квазинепрерывных функций. Доказывается, что квазинепрерывность функции следует из раздельной непрерывности функции.

Ключевые слова: раздельная непрерывность, квазинепрерывность, теорема Бэра.

В данной работе приводится доказательство леммы, сформулированной в работе [1] без доказательства.

Определение 1. Пусть дана функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Для фиксированного значения x , мы определяем функцию f_x по формуле $f_x(y) = f(x, y)$. Аналогично можно определить функцию f_y . Будем говорить, что функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ раздельно непрерывна, если для каждого x и $y \in \mathbb{R}$ функции f_x и f_y - непрерывны.

Определение 2. Функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазинепрерывной в точке (x, y) , если для каждого $\varepsilon > 0$ и любых непустых открытых множеств U и V таких, что $x \in U$ и $y \in V$, существуют открытое множество $U_0 \subseteq U$, и открытое множество $V_0 \subseteq V$, для которых

$$f(U_0 \times V_0) \subseteq (f(x, y) - \varepsilon, f(x, y) + \varepsilon).$$

Будем говорить, что f квазинепрерывна, если она квазинепрерывна в каждой точке.

Лемма 3. Если функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ раздельно непрерывна, то она квазинепрерывна.

Доказательство. Пусть даны точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и функция $\varphi(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Нетрудно видеть, что для доказательства квазинепрерывности функции f в точке (x_0, y_0) достаточно доказать квазинепрерывность функции φ в этой точке.

Пусть $\varepsilon > 0$, (x_0, y_0) – произвольная точка, U и V – произвольные открытые множества такие, что $x_0 \in U$, $y_0 \in V$. Так как U открыто, то существуют δ_x^0, δ_y^0 такие, что $(x_0 - \delta_x^0, x_0 + \delta_x^0) \subseteq U$, $(y_0 - \delta_y^0, y_0 + \delta_y^0) \subseteq V$. Поскольку φ раздельно непрерывна в точке (x_0, y_0) , то существует $\delta > 0$ такое, что $|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |\varphi_{y_0}(x_0) - \varphi_{y_0}(x)| = |\varphi_{y_0}(x)| < \varepsilon/2$.

Далее будем рассматривать отрезок

$$D = [x_0, x_0 + \min(\delta, \delta_{x_0}^0)] \subseteq U.$$

В каждой точке $x \in D$ для $\varepsilon/2 > 0$ существует $\delta_x > 0$ такое, что $|y_0 - y| < \delta_x \Rightarrow |\varphi_x(y_0) - \varphi_x(y)| < \varepsilon/2$. Отсюда, учитывая, что $|\varphi_x(y_0)| = |\varphi_{y_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, получаем

$$|\varphi_x(y)| \leq |\varphi_x(y) - \varphi_x(y_0)| + |\varphi_x(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

при $x \in D$ и $|y - y_0| < \delta_x$.

Далее будем работать с числами δ_x для каждого $x \in D$. На основе этих чисел построим новые:

$$\Delta_x = \sup\{y - y_0 : y_0 < y' \leq y \Rightarrow |\varphi_x(y')| \leq \varepsilon\}.$$

Очевидно, что $\delta_x \leq \Delta_x$.

Из определения чисел Δ_x следует

(1) Если $y \in [y_0, y_0 + \Delta_x]$, то $|\varphi_x(y)| \leq \varepsilon$.

(2) Для любого $x \in D$ и для любого $\alpha > 0$ существует точка $y^* \in (y_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_x + \alpha)$, для которой $|\varphi_{y^*}(x)| > \varepsilon$.

Теперь рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N}$ подмножества D следующего вида:

$$F_n = \left\{x \in D : \Delta_x \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Очевидно, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = D$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ $F_n \subseteq F_{n+1}$. Докажем замкнутость F_n . Действительно, если существует точка $x^* \in \overline{F_n} \setminus F_n$, то $\Delta_{x^*} < \frac{1}{n}$ и по свойству (2) для некоторой точки $y^* \in (y_0 + \Delta_x, y_0 + \frac{1}{n})$ $|\varphi_{y^*}(y^*)| > \varepsilon$. Выберем последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in F_n$ такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$. Тогда $|\varphi_{y^*}(x_k)| = |\varphi_{x_k}(y^*)| \leq \varepsilon$, так как $\Delta_{x_k} \geq \frac{1}{n}$, а $y^* \in [y_0, y_0 + \frac{1}{n}] \subseteq [y_0, y_0 + \Delta_{x_k}]$. Так как функция φ_{y^*} непрерывна, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{y^*}(x_k) = \varphi_{y^*}(x^*) = \varphi_{x^*}(y^*)$, что невозможно, так как $|\varphi_{y^*}(x_k)| = |\varphi_{x_k}(y^*)| \leq \varepsilon$, а $|\varphi_{x^*}(y^*)| > \varepsilon$. Таким образом замкнутость F_n для всех $n \in \mathbb{N}$ доказана.

По теореме Бэра полное метрическое пространство D не может быть объединением счетного числа нигде не плотных множеств. Следовательно, существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\text{Int } F_n \neq \emptyset$, то есть существует интервал $(a, b) \subseteq F_n \subseteq D \subseteq U$. Нетрудно видеть, что $G = (a, b) \times \left(y_0, y_0 + \frac{1}{n}\right) \subseteq U \times V$ и функция $|\varphi(x, y)| < \varepsilon$ для $(x, y) \in G$. Таким образом, квазинепрерывность функции φ , а значит и функции f , в точке (x_0, y_0) доказана.

Поскольку точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ была выбрана произвольно, функция f квазинепрерывна.

Заметим, что обратное неверно. Для примера рассмотрим характеристическую функцию χ_A множества $A = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$. Эта функция в нуле квазинепрерывна, но не отдельно непрерывна.

Литература

1. Robert W. Vallin The Pointwise limit of separately continuous function // Real Analysis Exchange. 2008/2009. P. 139–146.

Об универсальных метрических пространствах

М.О. Реброва, С.П. Гулько

Томский государственный университет

E-mail: rijayababa@gmail.com

Описывается банахово пространство, которое будет являться универсальным для класса всех метрических пространств веса $\tau \geq \aleph_0$. Затем для частного случая такого пространства рассмотрим фактор-универсальность, и перейдем к метрической универсальности для класса банаховых пространств.

Ключевые слова: *еж коллечности τ , универсальность, изометричное вложение, банахово пространство, метрическое пространство.*

Рассмотрим $l_1(\Gamma)$ – пространство суммируемых в первой степени функций $x: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, наделенное нормой $\|x\|_{l_1(\Gamma)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|$. Запись $x(\gamma)$ указывает на то, что количество значений функции $x \in l_1(\Gamma)$ зависит от Γ , а именно равно мощности этого множества. Заметим, что не более чем счетное число значений функции $x \in l_1(\Gamma)$ отлично от нуля, так как в противном случае не будет выполняться неравенство $\|x\|_{l_1(\Gamma)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)| < \infty$, то есть функция x не будет являться суммируемой. Возьмем последовательность непересекающихся множеств Γ_n , причем каждое Γ_n будем считать множеством, наделенным дискретной топологией. Мы будем рассматривать случай, когда мощности всех множеств совпадают $|\Gamma_n| = \tau \geq \aleph_0$. Теперь построим счетное l_∞ -произведение $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$, где каждое $l_1(\Gamma_n)$ определено как выше. Введем в $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ норму следующим образом:

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{l_1(\Gamma_n)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |x_n(\gamma)|.$$

Покажем, что мы действительно задали норму, для этого проверим ее аксиомы. Опустим доказательство аксиом (A1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ для всех $x \in (l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ и (A2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ из-за их тривиальности.

(A3) Проверим неравенство треугольника. Пусть $x, y \in (l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$, тогда:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |x_n(\gamma) + y_n(\gamma)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |x_n(\gamma)| + |y_n(\gamma)| = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\sum_{\gamma \in \Gamma_n} |x_n(\gamma)| + \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |y_n(\gamma)| \right] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |x_n(\gamma)| + \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |y_n(\gamma)| = \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Таким образом, пространство $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ является нормированным.

Теорема 1. Пространство $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ является полным относительно нормы $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{l_1(\Gamma_n)}$.

Доказательство опустим, так как оно строится стандартным образом.

Легко показать, что $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ является линейным пространством. Таким образом, это линейное, нормированное и полное пространство, т.е. оно является банаховым по определению.

Теперь перейдем к построению нашего варианта универсального метрического пространства. Для начала покажем, что метризуемый еж $J(\Gamma)$ коллечности $\tau = |\Gamma|$ изометрично вкладывается в пространство $l_1(\Gamma)$. Пусть $x \in J(\Gamma)$ и $x \neq 0$, тогда существует единственное $\gamma_x \in \Gamma$ такое, что $x \in I_{\gamma_x}$. Не строго можно сказать, что γ_x – номер «иголки» I_{γ_x} ежа $J(\Gamma)$, на которой лежит точка x . Рассмотрим отображение $x \mapsto \varphi(x) \in l_1(\Gamma)$, где $\varphi(x)$ такая точка в $l_1(\Gamma)$, у которой все координаты равны нулю, кроме координаты с номером γ_x , причем в этой координате $[\varphi(x)](\gamma_x) = x$. В итоге мы имеем

$$[\varphi(x)](\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma \neq \gamma_x \\ x, & \gamma = \gamma_x \end{cases}$$

Проверим, что φ является изометрией, то есть покажем, что $\rho[(x, \gamma_x), (y, \gamma_y)] = d[\varphi(x), \varphi(y)]$, где $x, y \in J(\Gamma)$. Метрика d на пространстве $l_1(\Gamma)$ порождается нормой стандартным образом: $d(x, y) = \|x - y\|_{l_1(\Gamma)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma) - y(\gamma)|$.

Согласно определению метризуемого ежа $J(\Gamma)$ коллечности $\tau = |\Gamma|$ (см. [2. С. 374]) для точек $x, y \in J(\Gamma)$ будем иметь

$$\rho[(x, \gamma_x), (y, \gamma_y)] = \begin{cases} |x - y|, & \text{если } \gamma_x = \gamma_y, \\ x + y, & \text{если } \gamma_x \neq \gamma_y, \end{cases}$$

где ρ – метрика на $J(\Gamma)$, $\gamma_x, \gamma_y \in \Gamma$. В свою очередь,

$$d[\varphi(x), \varphi(y)] = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\varphi(x)(\gamma) - \varphi(y)(\gamma)| = \begin{cases} |x - y|, & \text{если } \gamma_x = \gamma_y, \\ x + y, & \text{если } \gamma_x \neq \gamma_y \end{cases}$$

так как у точек $\varphi(x)(\gamma), \varphi(y)(\gamma)$ все координаты нулевые, кроме γ_x -ой и γ_y -ой соответственно. Запись $\varphi(x)(\gamma)$ по прежнему указывает на то, что количество значений функции $\varphi(x)(\gamma) \in l_1(\Gamma)$ зависит от мощности множества Γ . В силу построения отображения φ равенство $\rho[(x, \gamma_x), (y, \gamma_y)] = d[\varphi(x), \varphi(y)]$ верно.

Теперь распространим эту идею на уже рассмотренное пространство $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$. Построим отображение Φ в пространство $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ следующим образом: $\Phi(x_1, x_2, \dots) =$

$(\varphi(x_1)(\gamma), \varphi(x_2)(\gamma), \dots)$, где $x_n \in J(\Gamma_n)$. Ясно, что $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots) \in (l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$, так как каждая $\varphi(x_i) \in l_1(\Gamma_i)$. Следовательно, Φ есть вложение счетного произведения ежей $J(\Gamma_1) \times J(\Gamma_2) \times \dots$ в пространство $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$.

Теорема 2. Φ является изометрическим вложением счетного произведения ежей $J(\Gamma_1) \times J(\Gamma_2) \times \dots$ в пространство $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$.

Доказательство. Для краткости обозначим $J(\Gamma_1) \times J(\Gamma_2) \times \dots$ за J , а $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ – за l . Нужно показать, что $\rho(x, y)_J = d(x, y)_l$. Согласно определению, данному выше $\|x\|_l = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{l_1(\Gamma_n)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |x_n(\gamma)|$, значит, соответствующая этой норме метрика будет иметь вид: $d(x, y)_l = \|x - y\|_l = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |x_n(\gamma) - y_n(\gamma)|$.

Таким образом

$$\begin{aligned} & d[\Phi(x_1, x_2, \dots), \Phi(y_1, y_2, \dots)]_l = \\ & = d[(\varphi(x_1)(\gamma), \varphi(x_2)(\gamma), \dots), (\varphi(y_1)(\gamma), \varphi(y_2)(\gamma), \dots)]_l = \\ & = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} |\varphi(x_n)(\gamma) - \varphi(y_n)(\gamma)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} |x_n - y_n|, & \text{если } \gamma_{x_n} = \gamma_{y_n}, \\ x_n + y_n, & \text{если } \gamma_{x_n} \neq \gamma_{y_n}, \end{cases} \end{aligned}$$

где x_n, y_n – значение ненулевой координаты с номером $\gamma_{x_n}, \gamma_{y_n}$.

В пространстве J метрику определим как покоординатный супремум, т.е.

$$\begin{aligned} \rho(x, y)_J & = \sup_{n \in \mathbb{N}} \rho[(x_n, \gamma_{x_n})(y_n, \gamma_{y_n})]_{J(\Gamma_n)} = \\ & = \sup_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} |x_n - y_n|, & \text{если } \gamma_{x_n} = \gamma_{y_n}, \\ x_n + y_n, & \text{если } \gamma_{x_n} \neq \gamma_{y_n}. \end{cases} \end{aligned}$$

На основании определения отображения Φ заключаем, что $\rho(x, y)_J = d(x, y)_l$.

Следствие. Пространство $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$ является топологически универсальным для класса всех метрических пространств веса $\tau \geq \aleph_0$ в следующем смысле: любое метрическое пространство гомеоморфно вкладывается в $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$.

Доказательство универсальности следует из теоремы Ковальского (см. [2. С. 418—419]): счетное произведение ежей $J(\Gamma_1) \times J(\Gamma_2) \times \dots$ является топологически универсальным для всех метризуемых пространств веса $\tau \geq \aleph_0$. То есть любое метризуемое веса $\tau \geq \aleph_0$, и, значит, метрическое, пространство гомеоморфно вкладывается в счетное произведение ежей, которое в свою очередь изометрично вкладывается в $(l_1(\Gamma_1) \times l_1(\Gamma_2) \times \dots)_{l_\infty}$.

Утверждение. Для любого банахова пространства E существует линейная непрерывная сюръекция $l_1(\Gamma) \rightarrow E$, где мощность множества Γ равна весу пространства E .

Доказательство этого утверждения подобно доказательству следующей теоремы: для любого сепарабельного банахова пространства E существует линейная непрерывная сюръекция $l_1 \rightarrow E$ (см. [3. С. 36]).

Теорема 3 (Фактор-универсальность). Пространство $(l_1(\Gamma) \times l_1(\Gamma) \times \dots)_{l_\infty}$ обладает следующим свойством универсальности: для любого сепарабельного банахова пространства E существует линейная ограниченная сюръекция $\tilde{T}: (l_1(\Gamma) \times l_1(\Gamma) \times \dots)_{l_\infty} \rightarrow (E \times E \times \dots)_{l_\infty}$.

Теорема 4. Любое банахово пространство E изометрично вкладывается в $(l_1(\Gamma) \times l_1(\Gamma) \times \dots)_{l_\infty}$.

Доказательство вытекает из следующей теоремы, так как $l_\infty \subset (l_1(\Gamma) \times l_1(\Gamma) \times \dots)_{l_\infty}$.

Теорема 5. Любое банахово пространство E изометрично вкладывается в l_∞ .

Доказательство: Рассмотрим сопряженное к E пространство E^* , т.е. пространство линейных ограниченных функционалов на E . Единичный шар $B^* = \{f: \|f\|_{E^*} \leq 1\}$ является компактным относительно $*$ -слабой топологии по теореме Алаоглу, т.е. (B^*, w^*) – компакт. Пространство непрерывных ограниченных (т. к. функции непрерывны на компакте) функций $C(B^*, w^*)$ является подпространством всех ограниченных функций l_∞ . Пусть $x \in E$, определим отображение $x \mapsto f_x \in C(B^*, w^*)$ следующим образом: $f_x(g) = g(x)$, где $g \in E^*$. Покажем, что мы определили изометрию:

$$\|f_x\| = \max_{g \in C(B^*, w^*)} |f_x(g)| = \max_{g \in C(B^*, w^*)} |g(x)| = \max_{\|g\| \leq 1} |g(x)| = \|x\|.$$

Таким образом, мы построили изометричное вложение пространства E в $C(B^*, w^*) \subset l_\infty$

Доказав последнюю теорему, мы показали, что банахово пространство $(l_1(\Gamma) \times l_1(\Gamma) \times \dots)_{l_\infty}$ будет являться метрически универсальным для класса всех банаховых пространств.

Таким образом, нами было построено пространство $(l_1(\Gamma) \times l_1(\Gamma) \times \dots)_{l_\infty}$, которое является универсальным для класса всех метрических пространств веса $\tau \geq \aleph_0$, метрически универсальным для класса всех банаховых пространств, фактор-универсальным для класса всех сепарабельных банаховых пространств.

Литература

1. Келли Дж. Общая топология. М. : Наука, 1968. 387 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология: пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.
3. Albiac F., Kalton N.J. Topics in Banach space theory. N.Y. : Springer, 2006. 373 p.

Гомеоморфность подмножеств «двойной стрелки»

Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева

Томский государственный университет
E-mail: sirius9113@mail.ru

Пусть D – «двойная стрелка». Доказано, что несчетное подпространство $M \subset D$ гомеоморфно D тогда и только тогда, когда оно замкнуто и без изолированных точек. Кроме того, рассматривается вопрос: какие нетривиальные подмножества «двойной стрелки» гомеоморфны прямой Зоргенфрея? Получено, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ является либо замкнутым, либо счетным, замыкание которого счетно относительно евклидовой топологии прямой, то подмножество «двойной стрелки» $M_A = \{(x, 0) \in D : x \in S \setminus A\} \cup \{(y, 1) \in D : y \in A\}$ гомеоморфно прямой Зоргенфрея.

Ключевые слова: гомеоморфизм, «двойная стрелка», прямая Зоргенфрея.

Символом D обозначается пространство «двойная стрелка», а S – прямая Зоргенфрея. Напомним, что топологическим пространством «двойная стрелка» называется множество $D = C_0 \cup C_1 \subset \mathbb{R}^2$, где $C_0 = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\}$ и $C_1 = \{(x, 1) : 0 \leq x < 1\}$ с топологией на нем, порожденной базой, состоящей из множества вида

$$\{(x, i) \in D : x_0 - 1/k < x < x_0 \text{ и } i = 0, 1\} \cup \{(x_0, 0)\},$$

где $0 < x_0 \leq 1$ и $k = 1, 2, \dots$, а так же из множества вида

$$\{(x, i) \in D : x_0 < x < x_0 + 1/k \text{ и } i = 0, 1\} \cup \{(x_0, 1)\},$$

где $0 \leq x < 1$ и $k = 1, 2, \dots$ [2]. Обозначим S_A топологическое пространство, база окрестностей которого в точке $x \in S$ задается следующим образом:

если $x \in S \setminus A$, то $\{(a, x) : a \in \mathbb{R}, a < x\}$;

если $x \in A$, то $\{[x, b) : b \in \mathbb{R}, x < b\}$

Очевидно, что множества $C_0 \subset D$ и $C_1 \subset D$ гомеоморфны пространству S . Возникает следующий вопрос: какие еще множества $M \subset D$ гомеоморфны пространству S ? В работе [3] было доказано, что пространство S_A гомеоморфно пространству S , если множество A является либо замкнутым множеством, либо счетным, замыкание которого в \mathbb{R} счетно.

Нетрудно показать, что пространство S_A гомеоморфно множеству $M_A \subset D$ следующего вида:

$$M_A = \{(x, 0) \in D : x \in S \setminus A\} \cup \{(y, 1) \in D : y \in A\}.$$

Таким образом, если множество A является либо замкнутым множеством, либо счетным, замыкание которого в \mathbb{R} счетно, то пространство M_A гомеоморфно пространству S .

Далее рассматривается вопрос какие еще подмножества D гомеоморфны самому пространству D .

Теорема. Пусть $M \subset D$ несчетное множество. Пространство D гомеоморфно M тогда и только тогда, когда M замкнуто и без изолированных точек.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Рассмотрим множество

$$P_1 = \{(x, 1) \in M; (x, 0) \notin M\}.$$

Предположим, что $|P_1| > \aleph_0$. Пусть L_1' – множество точек конденсации множества $L_1 = \{x \in \mathbb{R}; (x, 1) \in P_1\}$ в евклидовой топологии $\mathbb{R} \times \{1\}$. Известно [1], что $|L_1'| > \aleph_0$. Нетрудно видеть, что найдется множество $L_1'' \subset L_1'$ такое, что $|L_1''| > \aleph_0$ и для любой точки $x \in L_1''$ и любого $\varepsilon > 0$ верно, что $|(x - \varepsilon, x] \cap L_1''| > \aleph_0$. Следовательно, $(x, 0) \in M$ в силу замкнутости множества M , что противоречит определению множества P_1 . Тогда $|P_1| \leq \aleph_0$.

Аналогично можно доказать, что множество $P_0 = \{(x, 0) \in M; (x, 1) \notin M\}$ не более чем счетно.

Ясно, что если $(a, 0) \in P_0$, то $(a, 1) \in D \setminus M$. Рассмотрим $(b, i) = \inf \{(x, i) \in M; (x, i) > (a, 0)\}$. В силу замкнутости множества M точка (b, i) принадлежит множеству M . Поскольку во множестве M нет изолированных точек, то $(b, 0) \notin M$, т.е. $(b, 0) \in P_1$. Таким образом, каждой точке множества P_0 взаимно - однозначно ставится в соответствие точка P_1 .

Пусть $P_0 = \{(a_n, 0)\}_{n=1}^{\infty}$ и $P_1 = \{(b_n, 1)\}_{n=1}^{\infty}$, где $(a_n, i) < (b_n, i)$ для любого $n = 1, 2, \dots$ и $i = 0, 1$. Следовательно, $D \setminus M = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((a_n, 1); (b_n, 0))$. Определим отображение $\varphi : D \rightarrow [0, 1]$ таким, что $\varphi[(a_n, 0); (b_n, 1)] = \frac{a_n + b_n}{2}$, а в остальных точках продолжаем его по непрерывности с сохранением монотонности. Не теряя общности, можно предположить

$$\varphi|_M : M \xrightarrow{na} [\inf \{x; x \in M\}; \sup \{x; x \in M\}].$$

Так как прообразом любой точки отображения $\varphi|_M$ являются ровно две точки, то по [4; (лемма 2.5)] подпространство M гомеоморфно «двойной стрелке» D .

Литература

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. М. : Мир, 1986. 752 с.
3. Сухачева Е.С., Хмылева Т.Е. О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 5(31). С. 63–68.
4. Kubiś W., Kalenda O. Complementation in Spaces of Continuous Functions on Compact Lines // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 386, no. 1. P. 241–257.

Научное издание

**Молодежная научная конференция
«Все грани математики и механики»
Томск, 24–30 апреля 2015 г.**

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Издание подготовлено в авторской редакции
Оригинал-макет А.И. Лелюю

Подписано к печати 26.11.2015 г. Формат 60×84¹/₁₆.

Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 10,7.

Тираж 20 экз. Заказ № 1395.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–53-15-28
Сайт: <http://publish.tsu.ru>
E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-94621-518-3



9 785946 215183